NGUYỄN ĐỨC CHÍ

Giải bài tập
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH
11

Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội

NGUYỄN ĐỨC CHÍ

Giải bài tập
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH
11
(CƠ BẢN)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

- **GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 CƠ BẢN**, được biên soạn với mục đích giúp học sinh đối chiếu và kiểm tra lại các kết quả khi thực hiện giải các bài tập trong sách giáo khoa. Muốn thế, các em hãy dành thời gian nhất định để làm các bài tập trong sách giáo khoa, sau đó đối chiếu và kiểm tra lại các kết quả thực hiện.
- **GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 CƠ BẢN**, phụ huynh có thể sử dụng để kiểm tra con, em mình trong việc học tập và luyện tập các kiến thức và các kĩ năng cơ bản.
- **GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 CƠ BẢN**, các đồng nghiệp có thể sử dụng để tham khảo.

Mong được sự góp ý chân thành của bạn đọc gần xa.

TÁC GIẢ

Chương I.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Hàm số y = sinx

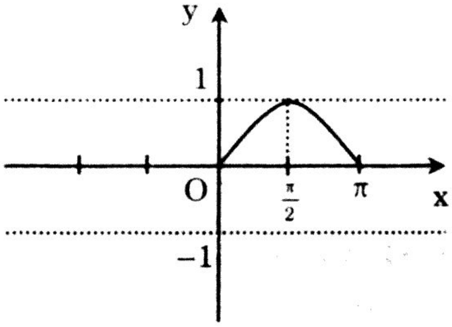
* Hàm số y = sinx

- Tập xác định ℝ, tập giá trị: [–1; 1].
- Hàm số y = sinx là hàm số lẻ tuần hoàn chu kì 2π.

* Sự biến thiên và đồ thị hàm số y = sinx trên đoạn [0; π]

- Hàm số y = sinx đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2}]$, nghịch biến trên $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.
- Bảng biến thiên.

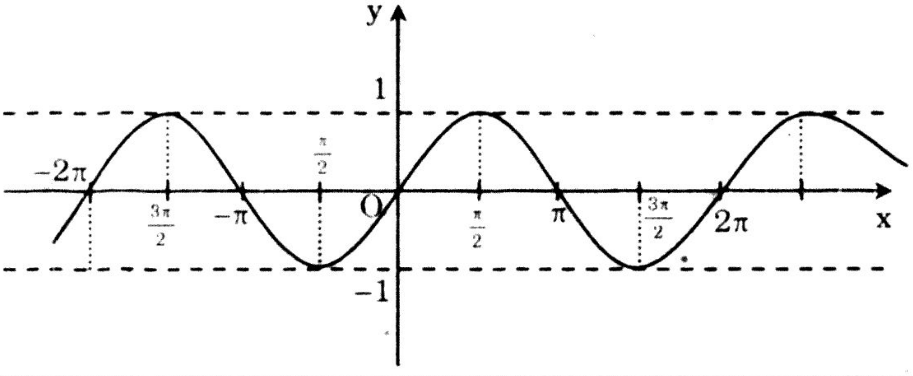
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = sinx	0	↗	1	↘	0



- Đồ thị hàm số y = sinx trên đoạn [0; π].

* Đồ thị hàm số y = sinx trên ℝ

- Hàm số y = sinx là hàm số lẻ nên lấy đối xứng của đồ thị trên đoạn [0; π] qua 0, ta được đồ thị hàm số trên đoạn [–π; π].
- Hàm số y = sinx là hàm số tuần hoàn chu kì 2π ta tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số trên đoạn [–π; π] theo vectơ $\vec{v} = (2\pi; 0)$ và $-\vec{v} = (-2\pi; 0)$ ta được đồ thị hàm số y = sinx trên ℝ.



2. Hàm số y = cosx

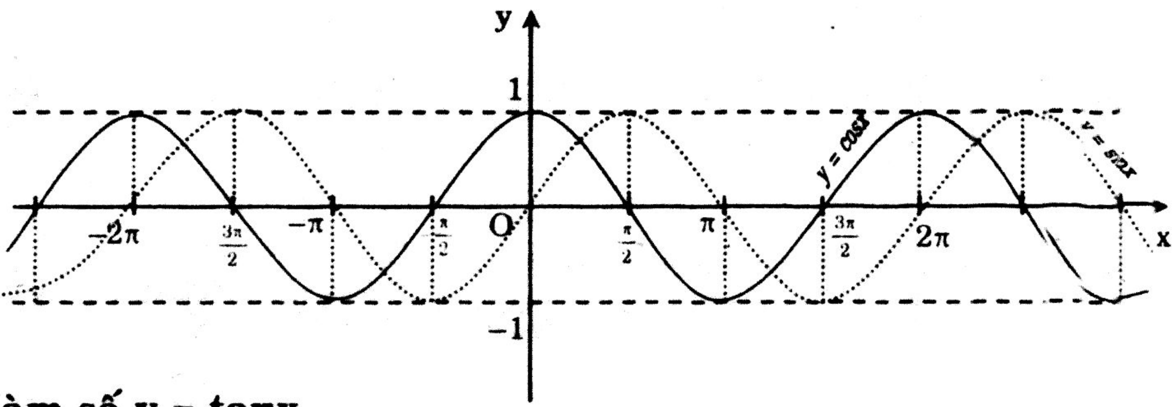
* Hàm số y = cosx

- Tập xác định $\mathbb{R}$, tập giá trị $[-1; 1]$.
- Hàm số y = cosx là hàm số chẵn, tuần hoàn chu kì 2π.

* Đồ thị của hàm số y = cosx trên $\mathbb{R}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Đồ thị của hàm số y = cosx suy ra từ đồ thị hàm số y = sinx bằng cách tịnh tiến đồ thị này theo vectơ $\vec{u}\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. (Sang trái một đoạn độ dài bằng $\frac{\pi}{2}$, song song trục hoành).



3. Hàm số y = tanx

* Hàm số y = tanx

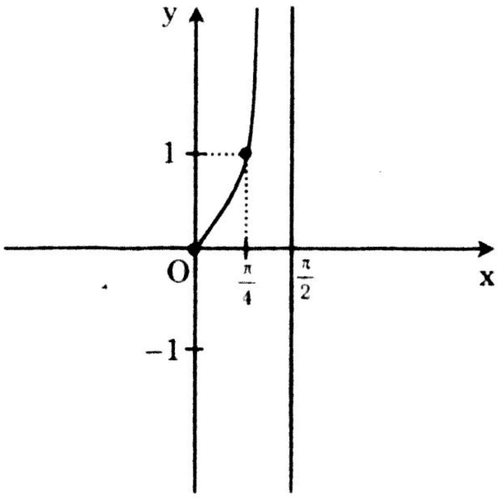
- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Hàm số y = tanx là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì π.

* Sự biến thiên và đồ thị hàm số y = tanx trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$.

- Hàm số y = tanx đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2})$.
- Bảng biến thiên.

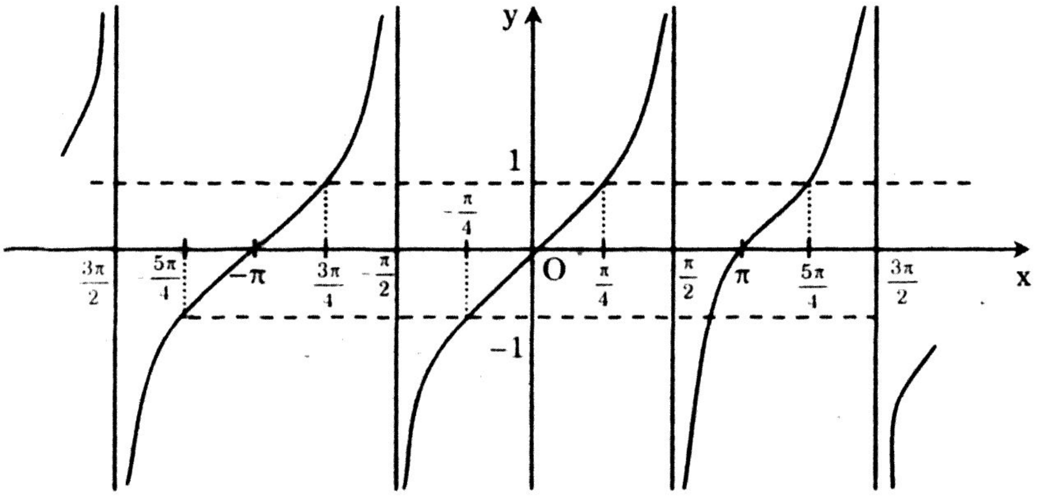
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y = tan x	0	1	$+\infty$

- Đồ thị hàm số y = tanx trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$.



* Đồ thị hàm số y = tanx trên D.

- Hàm số y = tanx là hàm số lẻ nên lấy đối xứng của đồ thị trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$ qua O, ta được đồ thị hàm số trên nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
- Hàm số y = tanx là hàm số tuần hoàn chu kì π, ta tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ theo vectơ $\vec{v} = (\pi; 0)$ và $-\vec{v} = (-\pi; 0)$ ta được đồ thị hàm số y = tanx trên D.



4. Hàm số y = cotx

* Hàm số y = cotx.

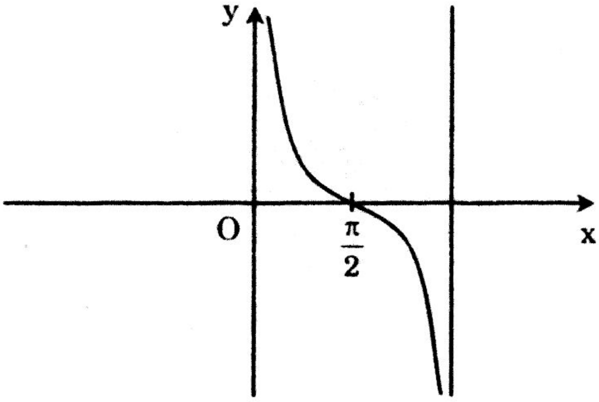
- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị $\mathbb{R}$.
- Hàm số y = cotx là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì π.

* Sự biến thiên và đồ thị của hàm số y = cotx trên khoảng $(0; \pi)$.

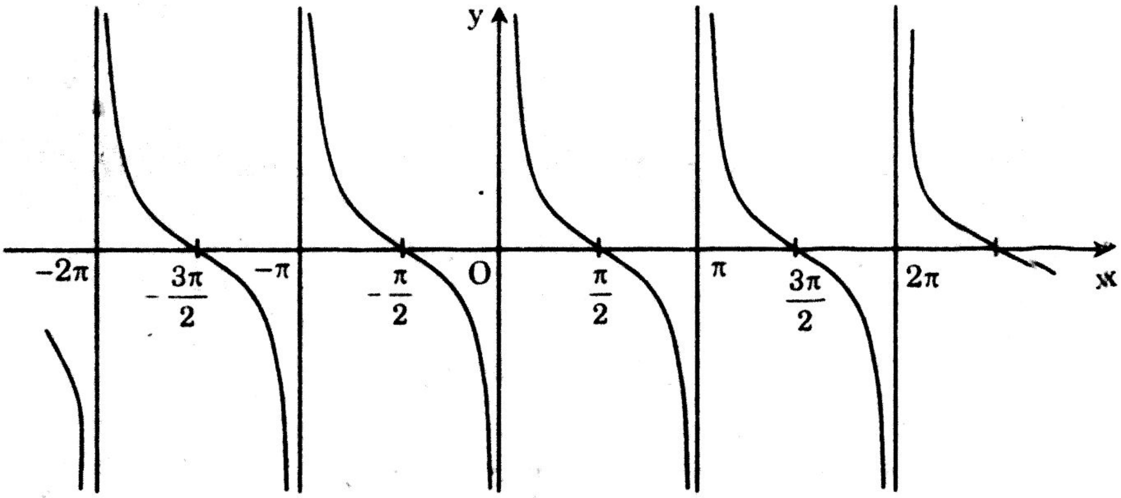
- Hàm số y = cotx nghịch biến trên $(0; \pi)$.
- Bảng biến thiên.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y = cot x	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

- Đồ thị hàm số y = cotx trên khoảng $(0; \pi)$.



* Đồ thị hàm số y = cotx trên D.



BÀI TẬP

1. Hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số y = tanx:

a) Nhận giá trị bằng 0;

b) Nhận giá trị bằng 1;

c) Nhận giá trị dương;

d) Nhận giá trị âm.

Giải

Căn cứ đồ thị hàm số y = tanx trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

a) tanx = 0 tại $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$.

b) tanx = 1 tại $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$.

c) tanx > 0 khi $x \in (-\pi; -\frac{\pi}{2}) \cup (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\pi; \frac{3\pi}{2})$.

d) tanx < 0 khi $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

2. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$;   b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$;

c) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;   d) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Giải

a) Hàm số $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Hàm số $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ xác định khi $\begin{cases} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \geq 0 \\ 1 - \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 - \cos x > 0$ (do $1 + \cos x \geq 0$)

$\Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi:

$$x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi $x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

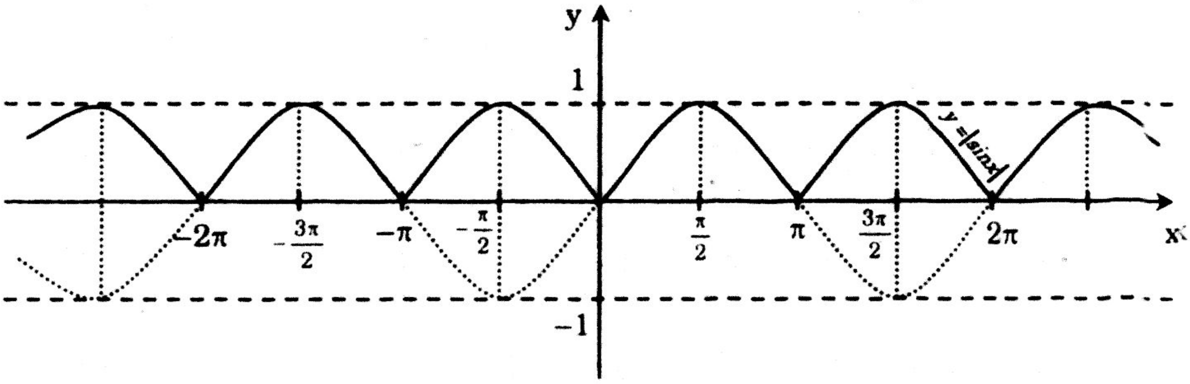
3. Dựa vào đồ thị của hàm số y = sinx, hãy vẽ đồ thị của hàm số y = |sinx|.

Giải

Ta có $|\sin x| = \begin{cases} \sin x \text{ nếu } \sin x \geq 0 \\ -\sin x \text{ nếu } \sin x < 0 \end{cases}$

Mà $\sin x < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi + k2\pi;\ 2\pi + k2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

Nếu lấy đối xứng qua Ox của phần đồ thị y = sinx trên các khoảng này và giữ nguyên phần đồ thị hàm số y = sinx trên các khoảng còn lại ta có đồ thị hàm số y = |sinx|.

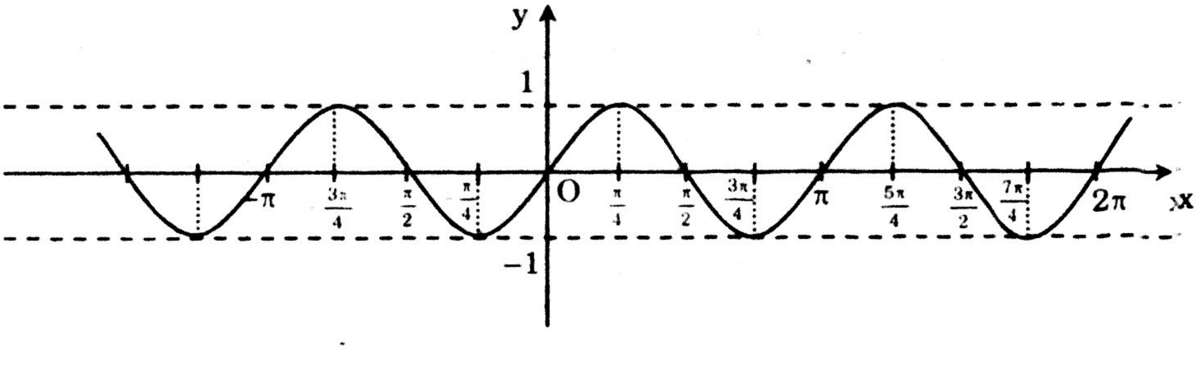


4. Chứng minh rằng sin 2(x + kπ) = sinx với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị hàm số y = sin2x.

Giải

Ta có $\sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + 2k\pi) = \sin 2x,\ k \in \mathbb{Z}$.

Từ đó suy ra hàm số y = sin2x là hàm số tuần hoàn chu kì π, mặt khác y = sin2x là hàm số lẻ, do đó ta vẽ đồ thị hàm số y = sin2x trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, rồi lấy đối xứng qua O ta có đồ thị trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ rồi sử dụng phép tịnh tiến $\vec{v} = (\pi; 0)$ và $-\vec{v} = (-\pi; 0)$ ta được đồ thị hàm số y = sin2x.

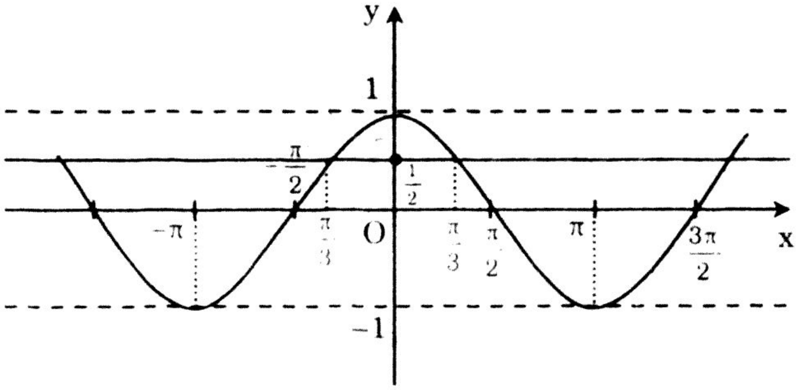


5. Dựa vào đồ thị hàm số y = cosx, tìm các giá trị của x để $\cos x = \frac{1}{2}$.

Giải

Cắt đồ thị y = cosx bằng đường thẳng $y = \frac{1}{2}$

Trên $[-\pi; \pi]$. Giao điểm có hoành độ tương ứng $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$.



Vậy giá trị của x tương ứng để $\cos x = \frac{1}{2}$ là $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

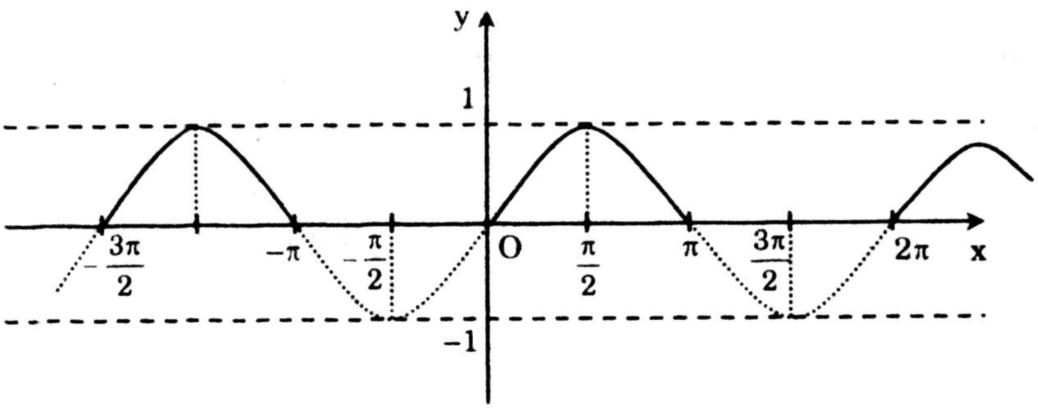
và $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Dựa vào đồ thị hàm số y = sin x, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

Giải

Căn cứ vào đồ thị hàm số y = sinx; sinx > 0, ứng với phần đồ thị nằm phía trên Ox.

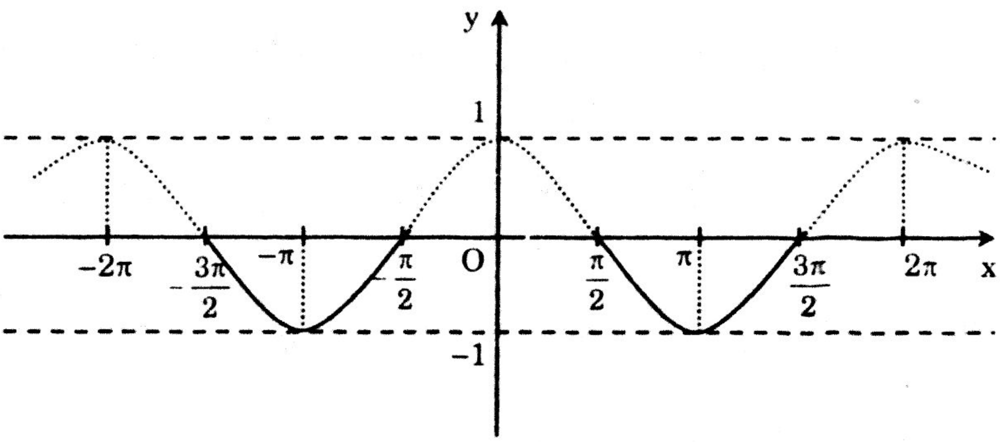
Vậy $x \in (k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.



7. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị âm.

Giải

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = \cos x$:



$\cos x < 0$, ứng với phần đồ thị nằm phía dưới Ox

Vậy $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \ \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$;

b) $y = 3 - 2\sin x$.

Giải

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$

Hàm số xác định khi $0 \le \cos x$

Do $0 \le \cos x \le 1$ suy ra $2\sqrt{\cos x} \le 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\cos x} + 1 \le 3$ hay $y \le 3$

Dấu = xảy ra khi $y = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Vậy max $y = 3$ khi $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $y = 3 - 2\sin x$

Do $\sin x \ge -1 \Leftrightarrow -\sin x \le 1 \Leftrightarrow -2\sin x \le 2 \Leftrightarrow 3 - 2\sin x \le 5$ hay $y \le 5$

Dấu = xảy ra khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Vậy max $y = 5$ khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Phương trình sinx = a

* Phương trình sinx = sinα (α là số cho trước) có hai nghiệm $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

* Tổng quát $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

* Phương trình sinx = a. (1)

- $|a| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm.
- $|a| \le 1$, phương trình (1) có hai nghiệm.

$x = \arcsin a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

và $x = \pi - \arcsin a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Phương trình cosx = a

* Phương trình cosx = cosα (α là số cho trước) có hai nghiệm là $x = \pm\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Tổng quát $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

* Phương trình cosx = a (2)

- $|a| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm.
- $|a| \le 1$, phương trình (2) có hai nghiệm.

$x = \pm\arccos a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình tanx = a

* Phương trình tanx = tanα (α là số cho trước), với điều kiện $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ phương trình có nghiệm: $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Tổng quát $\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (với điều kiện tanf(x), tang(x) được xác định).

* Phương trình tanx = a, với điều kiện $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, có nghiệm $x = \arctan a + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

4. Phương trình cotx = a

* Phương trình $\cot x = \cot\alpha$ (α là số cho trước), với điều kiện $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), phương trình có nghiệm. $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- **Tổng quát:** $\cot f(x) = \cot g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (với điều kiện $\cot f(x)$, $\cot g(x)$ được xác định).

* Phương trình $\cot x = a$ (điều kiện $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) có nghiệm $x = \operatorname{arccot} x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin(x+2) = \dfrac{1}{3}$; b) $\sin 3x = 1$;

c) $\sin\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$; d) $\sin(2x + 20^0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Giải

a) $$\sin(x+2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x + 2 = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{1}{3} - 2 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} - 2 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \arcsin\dfrac{1}{3} - 2 + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

và $x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} - 2 + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) $$\sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

c) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k.\frac{3\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin(2x + 20^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x + 20^0) = \sin(-60^0)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 20^0 = -60^0 + k.360^0,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x + 20^0 = 240^0 + k.360^0,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -40^0 + k.180^0,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = 110^0 + k.180^0,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -40^0 + k.180^0$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $x = 110^0 + k.180^0$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau.

Giải

$$\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \pi - x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy với $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $\sin 3x = \sin x$.

3. Giải các phương trình sau:

a) $\cos(x - 1) = \frac{2}{3}$;

b) $\cos 3x = \cos 12^0$;

c) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$.

Giải

a) $$\cos(x-1)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\arccos\frac{2}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ x-1=-\arccos\frac{2}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\arccos\frac{2}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=1-\arccos\frac{2}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = 1 + \arccos\frac{2}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

hoặc $x = 1 - \arccos\frac{2}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\cos 3x = \cos 12^0 \Leftrightarrow 3x = \pm 12^0 + k.360^0\ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \pm 4^0 + k.120^0\ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \pm 4^0 + k.120^0\ (k \in \mathbb{Z})$.

c) $$\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+k.2\pi \\ \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+k.2\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{11\pi}{18}+k.\frac{4\pi}{3} \\ x=-\frac{5\pi}{18}+k.\frac{4\pi}{3} \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{11\pi}{18} + \frac{4k\pi}{3}$ và $x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{4k\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

d) $$\cos^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=\frac{1}{2} \\ \cos 2x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3} \\ \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z}))$.

4. Giải phương trình sau $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$

Giải

Điều kiện $\sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ (loại)} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

5. Giải các phương trình:

a) $\tan\left(x - 15^{\circ}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$;

c) $\cos 2x.\tan x = 0$;

d) $\sin 3x.\cot x = 0$.

Giải

a) $\tan(x - 15^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, với điều kiện:

$$x - 15^0 \neq 90^0 + k180^0 \text{ hay } x \neq 105^0 + k.180^0.$$

Ta có phương trình $\tan(x - 15^0) = \tan 30^0$.

$\Leftrightarrow x - 15^0 = 30^0 + k.180^0 \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = 45^0 + k.180^0 \ (k \in \mathbb{Z})$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 45^0 + k.180^0 \ (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$, với điều kiện $3x - 1 \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ hay $x \neq \frac{1 + k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có phương trình $\cot(3x - 1) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

$\Leftrightarrow 3x - 1 = -\frac{\pi}{6} + k.\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k.\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k.\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 2736

c) cos2x.tanx = 0, với điều kiện cosx ≠ 0

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$, ta có phương trình: cos2x.sinx = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$ hoặc $x = k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

d) sin3x.cotx = 0, với điều kiện sinx ≠ 0 ⇔ x ≠ k.2π (k ∈ ℤ).

Ta có phương trình sin3x.cos = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \neq 3m, \ m \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{k.2\pi}{3}$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \, (k \neq 3m, m \in \mathbb{Z})$.

6. Với những giá trị nào của x thì giá trị của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ và $y = \tan 2x$ bằng nhau?

Giải

Với điều kiện $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos(\frac{\pi}{4} - x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi \end{cases}$

Ta có $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 2x \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k.\frac{\pi}{3} \ (k \neq 3m - 1, \ m \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + k.\frac{\pi}{3}$ $(k \neq 3m - 1, \ m \in \mathbb{Z})$.

7. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x - \cos 5x = 0$; b) $\tan 3x.\tan x = 1$.

Giải

a) $\sin 3x - \cos 5x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = \sin 3x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 5x = -\frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $\tan 3x.\tan x = 1$

Điều kiện $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$$\tan 3x.\tan x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan 3x = \cot x$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

▩ NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

* Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $at + b = 0$, trong đó a, b là các hằng số $(a \neq 0)$ và t là một trong các hàm số lượng giác.

Cách giải: Ta đưa phương trình đã cho về phương trình lượng giác cơ bản.

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

* Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $at^2 + bt + c = 0$, trong đó a, b, c là các hằng số $(a \neq 0)$ và t là một trong các hàm số lượng giác.

* *Cách giải:* Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đưa về giải phương trình lượng giác cơ bản.
(Quá trình giải có thể sử dụng các công thức lượng giác, các phép biến đổi lượng giác).

3. Phương trình bậc nhất đối với sinx, cosx

* Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, (a, b không đồng thời bằng 0 $(a^2 + b^2 \neq 0)$)

* Biến đổi $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha)$

với $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

▩ BÀI TẬP

1. Giải phương trình: $\sin^2 x - \sin x = 0$.

Giải

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;   b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$.

Giải

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$

Ta có phương trình $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ (nhận)

- $t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$

b)

$$2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x + 2\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x(1 + \sqrt{2}\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\cos\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \cos\frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi,\quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$;   b) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$;

c) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$;   d) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$.

Giải

a) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0$$

Đặt $t = \cos\frac{x}{2}$, $-1 \le t \le 1$, ta có phương trình:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$t = 1 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k4\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = k4\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow 8(1 - \sin^2 x) + 2\sin x - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow 8 - 8\sin^2 x + 2\sin x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$$

Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$, ta có phương trình:

$$8t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \text{(nhận)}$$

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$t = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$

Đặt $t = \tan x$ (điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$).

Ta có phương trình: $2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$$t = -1 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow \tan x = -\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{(thỏa điều kiện)}$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$. Điều kiện $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi \end{cases}$ hay $x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Đặt $t = \tan x$, ta có phương trình:

$$t - \frac{2}{t} + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

$$t = 1 \Rightarrow \tan x = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

$$t = -2 \Rightarrow \tan x = -2 \Rightarrow x = \arctan(-2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right.$, $(k \in \mathbb{Z})$.

4. Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x + \sin x.\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

b) $3\sin^2 x - 4\sin x.\cos x + 5\cos^2 x = 2$;

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$.

Giải

a) $2\sin^2x + \sin x\cos x - 3\cos^2x = 0$ (1)

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm phương trình (1).

* $\cos x \neq 0$, chia hai vế của (1) cho $\cos^2x$ ta được:

$$\frac{2\sin^2x}{\cos^2x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0 \Rightarrow 2\tan^2x + \tan x - 3 = 0$$

Đặt $t = \tan x$

Ta có phương trình: $2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$

- $t = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $t = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan x = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $3\sin^2x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2x = 2$ (2)

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm phương trình (2).

* $\cos x \neq 0$, chia hai vế của (2) cho $\cos^2x$, ta được:

$$\frac{3\sin^2x}{\cos^2x} - \frac{4\sin x}{\cos x} + 5 = \frac{2}{\cos^2x} \Rightarrow 3\tan^2x - 4\tan x + 5 = 2(1 + \tan^2x)$$

$$\Rightarrow \tan^2x - 4\tan x + 3 = 0$$

Đặt $t = \tan x$

Ta có phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$

- $t = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $t = 3 \Rightarrow \tan x = 3 \Rightarrow x = \arctan(3) + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(3) + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) $\sin^2x + \sin2x - 2\cos^2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2x = \frac{1}{2}$ (3)

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của (3).

* $\cos x \neq 0$, chia hai vế của (3) cho $\cos^2x$, ta được:

$$\frac{\sin^2x}{\cos^2x} + \frac{2\sin x}{\cos x} - 2 = \frac{1}{2\cos^2x} \Rightarrow \tan^2x + 2\tan x - 2 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2x)$$

$$\Rightarrow 2\tan^2x + 4\tan x - 4 = 1 + \tan^2x$$

$$\Rightarrow \tan^2x + 4\tan x - 5 = 0$$

Đặt $t = \tan x$, ta có phương trình:

$$t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -5 \end{array}\right.$$

- $t = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $t = -5 \Rightarrow \tan x = -5 \Rightarrow x = \arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right.$, $(k \in \mathbb{Z})$.

$$2\cos^2x - 3\sqrt{3}\sin2x - 4\sin^2x = -4$$

$$2\cos^2x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x - 4(1-\cos^2x) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x - 4 + 4\cos^2x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \sqrt{3}\sin x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

5. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$;

b) $3\sin3x - 4\cos3x = 5$;

c) $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$;

d) $5\cos2x + 12\sin2x - 13 = 0$.

Giải

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ (1)

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow \cos x - \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x = \sqrt{2}$ (do $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$)

$$\Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \sqrt{2}.\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Cách 2: Sử dụng công thức biến đổi.

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{1 + 3}\sin(x + \alpha) = 2\sin(x + \alpha)$$

Trong đó $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2\sin\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = 1$ (2)

Sử dụng công thức biến đổi:

$$\frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}}\sin(3x + \alpha) = \sin(3x - \alpha).$$

Trong đó $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ và $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

$$(2) \quad \Leftrightarrow \sin(3x - \pi) = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3} + \frac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3} + \frac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z},\ (\text{trong đó } \cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ và } \sin\alpha = \frac{4}{5}).$$

c) $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3)

Cách 1: (3) $\Leftrightarrow \sin x + \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (do $\tan\frac{\pi}{4} = 1$)

$$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$

Cách 2: Sử dụng công thức biến đổi:

Ta có $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$$2\sin x + 2\cos x = \sqrt{4+4}\,\sin(x+\alpha) = 2\sqrt{2}\,\sin(x+\alpha)$$

Trong đó $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Do đó: $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

d) $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{13}\cos 2x + \frac{12}{13}\sin 2x = 1 \qquad (4)$$

Sử dụng công thức biến đổi.

$$\frac{5}{13}\cos 2x + \frac{12}{13}\sin 2x = \sqrt{\frac{25}{169}+\frac{144}{169}}\sin(2x+\alpha) = \sin(2x+\alpha)$$

Trong đó $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ và $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$.

Ta có (4) $\Leftrightarrow \sin(2x+\alpha) = \sin\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x + \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(trong đó $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ và $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$).

6. Giải các phương trình:

a) $\tan(2x + 1).\tan(3x - 1) = 1$; b) $\tan x + \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

Giải

a) $\tan(2x + 1)\tan(3x - 1) = 1$ (1)

Với điều kiện $\begin{cases} 2x + 1 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x - 1 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{k\pi}{3} \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin(2x + 1)\sin(3x - 1)}{\cos(2x + 1)\cos(2x - 1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + 1)\cos(3x - 1) - \sin(2x + 1)\sin(3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + 1 + 3x - 1) \Leftrightarrow \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan x + \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ (2)

Với điều kiện $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$(2) \Leftrightarrow \tan x + \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan x.\tan\frac{\pi}{4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan x + \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan x - \tan^2 x + \tan x + 1 = 1 - \tan x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x(\tan x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \arctan 3 + k\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. a) Hàm số $y = \cos 3x$ có phải là hàm số chẳn không? Tại sao?

b) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ có phải là hàm số lẻ không? Tại sao?

Giải

a) Vì $\cos(-3x) = \cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}$

Nên hàm số $y = \cos 3x$ là hàm số chẳn.

b) Tại $x = 0$, ta có $\tan\left(-x + \frac{\pi}{5}\right) \neq -\tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$

Nên hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ không là hàm số lẽ.

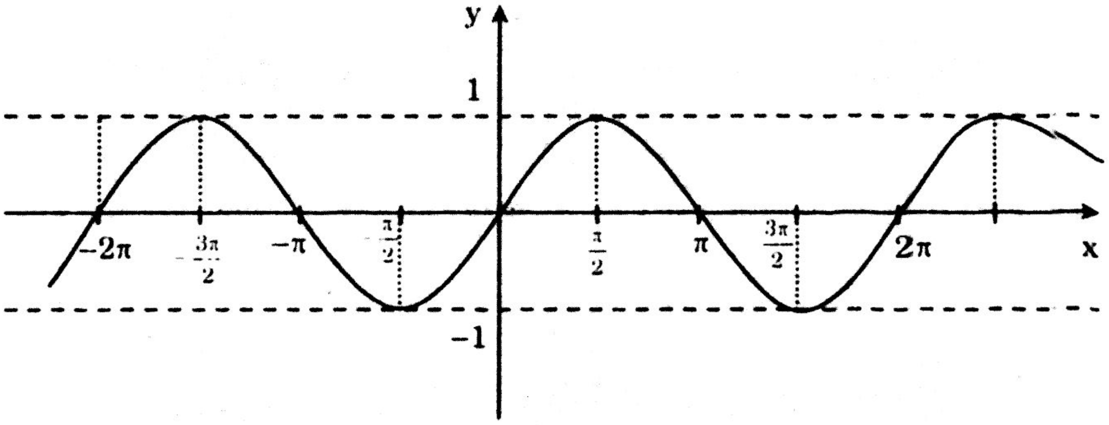
2. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm những giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ để cho hàm số đó:

a) Nhận giá trị bằng -1

b) Nhận giá trị âm.

Giải

Đồ thị hàm số $y = \sin x$.



a) Giá trị $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$ thì hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị là -1.

b) Giá trị $x \in (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi)$ thì hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị âm.

3. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$;

b) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$.

Giải

a) $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$

Do $\cos x \leq 1 \Rightarrow 1 + \cos x \leq 2$.

Suy ra $y \le \sqrt{2.2} + 1 = 3$.

Dấu = xảy ra khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 3 tại các giá trị $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $y = 3\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 2$

Do $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \le 1$

Nên $y \le 3.1 - 2 = 1$

Dấu = xảy ra khi $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 1 tại các giá trị $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Giải phương các phương trình sau:

a) $\sin(x + 1) = \dfrac{2}{3}$;

b) $\sin^2 2x = \dfrac{1}{2}$;

c) $\cot^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3}$;

d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3}$.

Giải

a) $\sin(x + 1) = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = \arcsin\left(\dfrac{2}{3}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x + 1 = \pi - \arcsin\left(\dfrac{2}{3}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \arcsin\dfrac{2}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - 1 - \arcsin\dfrac{2}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = -1 + \arcsin\dfrac{2}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - 1 - \arcsin\dfrac{2}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

b) $\sin^2 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin 2x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

c) $\cot^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3}$ (1)

Với điều kiện $\dfrac{x}{2} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot\dfrac{x}{2} = \cot\dfrac{\pi}{3} \\ \cot\dfrac{x}{2} = \cot\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ \dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3}$ (2)

Với điều kiện $\dfrac{\pi}{12} + 12x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $x \neq \dfrac{5\pi}{144} + \dfrac{k\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$

(2) $\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + 12x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 12x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{144} + \frac{k\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{5\pi}{144} + \frac{k\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$.

5. Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; b) $25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 25$;

c) $2\sin x + \cos x = 1$; d) $\sin x + 1,5\cot x = 0$.

Giải

a) $2\cos^2x - 3\cos x + 1 = 0$

Đặt $t = \cos x,\ -1 \le t \le 1$

Ta có phương trình $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

- $t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $25\sin^2x + 15\sin 2x + 9\cos^2x = 25$

$\Leftrightarrow 25(\sin^2x - 1) + 30\sin x\cos x + 9\cos^2x = 0$

$\Leftrightarrow -25\cos^2x + 30\sin x\cos x + 9\cos^2x = 0$

$\Leftrightarrow -16\cos^2x + 30\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(15\sin x - 8\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 15\sin x - 8\cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \tan x = \frac{8}{15}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\frac{8}{15} + k\pi\end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\frac{8}{15} + k\pi\end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

c) $2\sin x + \cos x = 1$ (1)

Sử dụng công thức biến đổi

$$2\sin x + \cos x = \sqrt{4+1}\,.\sin(x+\alpha) = \sqrt{5}\,.\sin(x+\alpha)$$

Trong đó $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ và $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{5}\sin(x+\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+\alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = \pi - \alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + k2\pi \\ x = \pi - \alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + k2\pi \end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$.

Trong đó $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ và $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

d) $\sin x + 1{,}5\cot x = 0$ (2)

Với điều kiện $x \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$$(2) \Leftrightarrow \sin x + 1{,}5\frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + 1{,}5\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 1{,}5\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 1{,}5\cos x - 1 = 0$$

Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$ ta có phương trình

$$t^2 - 1{,}5t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \text{ (loại)} \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

6. Phương trình $\cos x = \sin x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ là:

(A) 2; (B) 4; (C) 5; (D) 6.

Giải

Chọn (A)

- $\cos x = 0$ không là nghiệm phương trình.
- $\cos x \neq 0$, $\cos x = \sin x \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1$

$$\Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Trên đoạn $[-\pi;\pi]$, phương trình đã cho có hai nghiệm là $-\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{4}$.

7. Phương trình $\dfrac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5.

Giải

Chọn (A)

Với điều kiện $\cos 2x \neq 0$ ta có: $\dfrac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$

$\Leftrightarrow \cos 4x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\cos 2x\sin 2x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(2\cos 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có hai nghiệm là $\dfrac{\pi}{4}$ và $\dfrac{\pi}{6}$.

8. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình: $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$ là:

(A) $\dfrac{\pi}{6}$; (B) $\dfrac{2\pi}{3}$; (C) $\dfrac{\pi}{4}$; (D) $\dfrac{\pi}{3}$.

Giải

Chọn (C).

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x &\Leftrightarrow \sin x + 2\sin x\cos x - \cos x - 2\cos^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - \cos x) + \sin x - \cos x = 0\\ &\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2\cos x + 1) = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \cos x\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ \text{(Bài 6)}\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\ \text{(Bài 5)}\end{array}\right.$$

Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $\dfrac{\pi}{4}$.

9. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là:

(A) $-\frac{\pi}{3}$; (B) $-\frac{\pi}{4}$; (C) $-\frac{\pi}{6}$; (D) $-\frac{5\pi}{6}$.

Giải

Chọn (B)

Đặt t = tanx (điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

Ta có phương trình: $2t^2 + 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$

- $t = -1 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $t = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \arctan(-\frac{3}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $-\frac{\pi}{4}$.

10. Phương trình $2\tan x - 2\cot x - 3 = 0$ có số nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \pi)$ là:

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

Giải

Chọn (C).

$2\tan x - 2\cot x - 3 = 0 \, (1)$

Với điều kiện $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ hay $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$(1) \Leftrightarrow 2\tan x - \frac{2}{\tan x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$

Đặt t = tanx, ta có phương trình $2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

- $t = 2 \Leftrightarrow \tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan(-\frac{1}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \pi)$ phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Chương II.

TỔ HỢP – XÁC SUẤT

§1. QUI TẮC ĐẾM

NỘI DUNG CẦN NHỚ

* Số phần tử của tập hợp hữu hạn A được kí hiệu là n(A) hay $|A|$.

* **Qui tắc cộng:** Nếu có m cách chọn đối tượng X, n cách đối chọn đối tượng Y và nếu mỗi cách chọn đối tượng X không trùng với bất kì cách chọn đối tượng Y nào thì có m + n cách chọn đối tượng X hoặc Y.

- Qui tắc cộng thực chất là qui tắc đếm số phần tử của hai tập hợp hữu hạn không giao nhau A và B.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

* **Qui tắc nhân:** Nếu có m cách chọn đối tượng X và ứng với mỗi cách chọn đó có n cách chọn đối tượng Y thì có m.n cách chọn đối tượng X, Y.

BÀI TẬP

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

a) Một chữ số? b) Hai chữ số? c) Hai chữ số khác nhau?

Giải

a) Số có một chữ số là $\overline{x}$ trong đó $x \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Ta có 4 cách chọn từ tập hợp các chữ số 1, 2, 3, 4.

b) Số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$, trong đó $a, b \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Có 4 cách chọn chữ số a và mỗi chữ số a có 4 cách chọn chữ số b, do đó có 4.4 = 16 cách chọn số có hai chữ số từ tập hợp chữ số đã cho.

c) Số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ trong đó $a \in \{1; 2; 3; 4\}$, $b \in \{1; 2; 3; 4\} \setminus \{a\}$.

Có 4 cách chọn chữ số a và mỗi chữ số a có 3 cách chọn chữ số b, do đó có 4.3 = 12 cách chọn số có hai chữ số khác nhau từ tập hợp các chữ số đã cho.

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100?

Giải

Các số theo đề bài là số có không quá hai chữ số, được thành lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

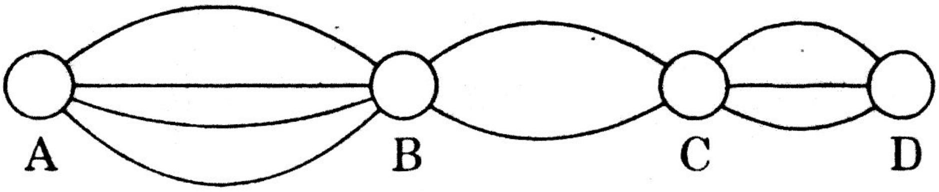
Theo bài 1, ta có 6 cách chọn số có một chữ số và 6^2 cách chọn số có hai chữ số.

Vậy số các số cần tìm là $6 + 6^2 = 42$ (số)

3. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình dưới. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D, qua B và C chỉ một lần?

b) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?



Giải

Từ A đến B có 4 con đường.

Từ B đến C có 2 con đường.

Từ C đến D có 3 con đường.

a) Từ A đến D bắt buộc phải đi qua B và C.

Vậy theo qui tắc nhân, số cách đi từ A đến D là $4.2.3 = 24$ (cách)

b) Từ A đến D rồi quay lại A có số cách là:

$$4.2.3.3.2.4 = 24^2 = 576 \text{ (cách)}$$

4. Có ba kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và bốn kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

Giải

Có ba cách chọn mặt đồng hồ, mỗi cách chọn mặt đồng hồ có bốn cách chọn kiểu dây.

Vậy có $3.4 = 12$ (cách) chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây.

§2. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Hoán vị

* Cho tập hợp A gồm có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một *hoán vị* của phần tử đó.

* Số các hoán vị của n phần tử kí hiệu P_n.

Ta có $\boxed{P_n = n!}$ (kí hiệu $n! = n(n-1)\ldots 2.1$ đọc là "n giai thừa". Qui ước $0! = 1$.

2. Chỉnh hợp

* Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Kết quả lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là *chỉnh hợp* chập k của n phần tử đã cho.

* Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \leq k \leq n)$. Kí hiệu A_n^k.

Ta có: $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ $(1 \leq k \leq n)$

Chú ý: $\boxed{P_n = A_n}$

3. Tổ hợp

* Giả sử tập A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là *tổ hợp* chập k của n phần tử đã cho $(1 \leq k \leq n)$.

* Qui ước: Tập rỗng là tổ hợp chập 0 của n phần tử.

* Số các tổ hợp chập k của n phần tử $(1 \leq k \leq n)$, kí hiệu là C_n^k.

Ta có: $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$

* Một số tính chất

- $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$
- $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ $(1 \leq k < n)$

BÀI TẬP

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi:

a) Có tất cả bao nhiêu số?

b) Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432 000?

Giải

a) Số các số gồm sáu chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 là hoán vị 6 phần tử ta có: $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ (số)

b) Số phải chọn có dạng $\overline{abcdef}$, trong đó a, b, c, d, e, f là các chữ số khác nhau thuộc tập hợp {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Để chọn được số chẵn, thì $f \in \{2; 4; 6\}$, có 3 cách chọn với mỗi cách chọn chữ số f, còn lại 5 chữ số được sắp xếp theo thứ tự để tạo thành số có 6 chữ số khác nhau, có $5! = 120$ cách chọn.

Vậy theo qui tắc nhân có $3.120 = 360$ cách chọn số các số chẵn cố sáu chữ số khác nhau từ tập hợp {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Tương tự: số các số lẽ có 6 chữ số khác nhau tạo nên từ sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 là 360 số.

c) Số phải chọn có dạng $\overline{abcdef}$, trong đó a, b, c, d, e, f là các chữ số khác nhau thuộc tập hợp {1; 2; 3; 4; 5; 6} số các số bé hơn 432000 bao gồm:

* $a \leq 4$ nghĩa là $a \in \{1; 2; 3\}$, có ba cách chọn chữ số a. Sau khi đã chọn chữ số a, năm số còn lại được sắp xếp thứ tự để ghép với chữ số a thành số có 6 chữ số khác nhau: có $5! = 120$ (cách chọn)

Theo qui tắc nhân, các số có chữ số hàng trăm nghìn nhỏ hơn 4 là $3.120 = 360$ (số)

* $a = 4$ và $b < 3$ nghĩa là $b \in \{1; 2\}$.

Có 2 cách chọn chữ số b.

Sau khi đã chọn chữ số a và chữ số b, còn lại 4 chữ số được sắp xếp thứ tự để ghép với hai chữ số này tạo thành số có 6 chữ số khác nhau, có $4! = 24$ (cách chọn).

Theo qui tắc nhân, các số có chữ số hàng trăm nghìn là 4, chữ số hàng chục nghìn nhỏ hơn 3, có tất cả: $2.24 = 48$ (số)

* $a = 4$; $b = 3$ và $c = 1$ ($c < 2$)

Sau khi đã chọn các chữ số a, b, c còn lại 3 chữ số sắp xếp thứ tự và ghép số trên tạo thành số có 6 chữ số khác nhau, có $3! = 6$ (cách chọn).

Số các số có chữ số hàng trăm nghìn là 4, chữ số hàng chục nghìn là 3, chữ số hàng nghìn là 1 : 6 số.

Vậy theo qui tắc cộng, số các số có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 432000 là 360 + 48 + 6 = 414 (số).

2. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 người khách vào 10 ghế kê thành một dãy?

Giải

Cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 khách theo hàng ngang là hoán vị 10 phần tử.

Ta có: $P_{10} = 10! = 3628800$ (cách)

3. Giả sử có bảy bông hoa màu khác nhau và ba cái lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm hoa vào ba cái lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông)?

Giải

Cách chọn 3 bông hoa từ 7 bông để cắm vào ba lọ khác nhau là chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử.

Ta có: $A_7^3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7.6.5.4!}{4!} = 210$ (cách)

4. Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

Giải

Cách chọn 4 bóng đèn từ 6 bóng đèn khác nhau để mắc nối tiếp là chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử.

Ta có: $A_6^4 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6.5.4.3.2!}{2!} = 360$ (cách)

5. Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 cái lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông) nếu:

a) Các bông hoa khác nhau?

b) Các bông hoa như nhau?

Giải

a) Cách chọn 3 trong 5 lọ hoa khác nhau để cắm 3 bông hoa là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử có:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5.4.3 = 60 \text{ (cách chọn).}$$

b) Nếu các bông hoa là như nhau, mỗi cách cắm là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử, ta có:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (cách cắm).}$$

6. Trong mặt phẳng, cho sáu điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

Giải

Cứ 3 điểm trong số 6 điểm phân biệt (không có ba điểm nào thẳng hàng) là ba đỉnh của tam giác. Số tam giác bằng số các tổ hợp chập 3 của 6 điểm), ta có số tam giác là

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20 \text{ (tam giác)}$$

7. Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng song song với nhau và năm đường thẳng vuông góc (đôi một phân biệt) với bốn đường thẳng song song đó?

Giải

*** Theo hàng ngang, có 4 đường thẳng song song, cứ hai đường thẳng là 2 cạnh đối của hình chữ nhật, mỗi lần chọn cho ta tổ hợp chập 2 của 4 phần tử (đường thẳng), có:**

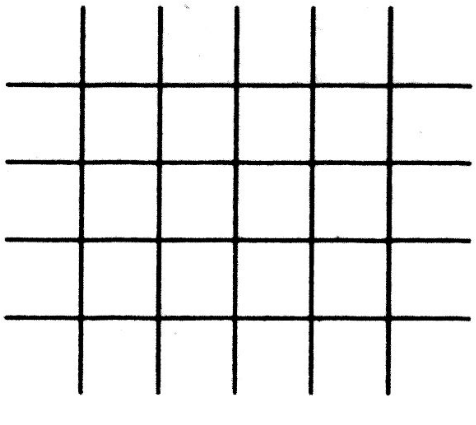
$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2}{2.1} = 6 \text{ cách.}$$

*** Theo hàng dọc, có 5 đường thẳng vuông góc với bốn đường thẳng trên, cứ hai đường thẳng là 2 cạnh đối còn lại của hình chữ nhật, mỗi lần chọn cho ta tổ hợp chập 2 của 5 phần tử (đường thẳng), có:**

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5.4.3!}{2!3!} = \frac{5.4}{2.1} = 10 \text{ cách.}$$

Từ đó theo qui tắc nhân, số hình chữ nhật là:

$$C_4^2.C_5^2 = 6.10 = 60 \text{ (hình chữ nhật).}$$



§3. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU–TƠN

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Công thức nhị thức Niu-tơn (Newton)

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \dots + C_n^ka^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1}b^{n-1} + C_n^nb^n$$

hoặc $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k$

2. Tam giác Pa-xcan (Pascal)

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
n=2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
n=3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
n=4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & & & & & \searrow & & \swarrow\;\searrow & & \swarrow & & & & & \\
n=5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
n=6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
n=7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Chú ý: * $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

* $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^kC_n^k + \dots + (-1)^nC_n^n = 0$

BÀI TẬP

1. Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-tơn:

a) $(a+2b)^5$;   b) $\left(a-\sqrt{2}\right)^6$;   c) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$.

Giải

a) $(a+2b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4 2b + C_5^2a^3.(2b)^2 + C_5^3a^2.(2b)^3 + C_5^4a(2b)^4 + C_5^5(2b)^5$

$= a^5 + 10^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5.$

b) $(a-\sqrt{2})^6 = C_6^0a^6 + C_6^1a^5(-\sqrt{2}) + C_6^2a^4(-\sqrt{2})^2 + C_6^3a^3(-\sqrt{2})^3$

$+C_6^4a^2.(-\sqrt{2})^4 + C_6^5a(-\sqrt{2})^5 + C_6^6(-\sqrt{2})^6$

$= a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8.$

c) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}=C_{13}^{0}x^{13}+C_{13}^{1}x^{12}.\left(-\frac{1}{x}\right)+C_{13}^{2}x^{11}.\left(-\frac{1}{x}\right)^{2}=C_{13}^{3}x^{10}\left(-\frac{1}{x}\right)^{3}+C_{13}^{4}x^{9}\left(-\frac{1}{x}\right)^{4}$

$$+C_{13}^{5}x^{8}\left(-\frac{1}{x}\right)^{5}+C_{13}^{6}x^{7}\left(-\frac{1}{x}\right)^{6}+C_{13}^{7}x^{6}\left(-\frac{1}{x}\right)^{7}+C_{13}^{8}x^{5}\left(-\frac{1}{x}\right)^{8}+C_{13}^{9}x^{4}\left(-\frac{1}{x}\right)^{9}$$

$$+C_{13}^{10}x^{3}\left(-\frac{1}{x}\right)^{10}+C_{13}^{11}x^{2}\left(-\frac{1}{x}\right)^{11}+C_{13}^{12}x\left(-\frac{1}{x}\right)^{12}+C_{13}^{13}\left(-\frac{1}{x}\right)^{13}$$

$$=C_{13}^{0}x^{13}+C_{13}^{1}(-x^{11})+C_{13}^{2}x^{9}+C_{13}^{3}(-x^{7})+C_{13}^{4}x^{5}+C_{13}^{5}(-x^{3})$$

$$+C_{13}^{6}x+C_{13}^{7}\left(-\frac{1}{x}\right)+C_{13}^{8}\frac{1}{x^{3}}+C_{13}^{9}\left(-\frac{1}{x^{5}}\right)+C_{13}^{10}\frac{1}{x^{7}}+C_{13}^{11}\left(-\frac{1}{x^{9}}\right)$$

$$+C_{13}^{12}\frac{1}{x^{11}}+C_{13}^{13}\left(-\frac{1}{x^{13}}\right)$$

$$=C_{13}^{0}x^{13}-C_{13}^{1}x^{13-2}+C_{13}^{2}x^{13-4}-C_{13}^{3}x^{13-6}+C_{13}^{4}x^{13-8}-C_{13}^{5}x^{13-10}$$

$$+C_{13}^{6}x^{13-12}-C_{13}^{7}x^{13-14}+C_{13}^{8}x^{13-16}+C_{13}^{9}x^{13-18}+C_{13}^{10}x^{13-20}-C_{13}^{11}x^{13-22}$$

$$+C_{13}^{12}x^{13-24}-C_{13}^{13}x^{13-26}$$

$$=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}(-1)^{k}.x^{13-2k}$$

. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức: $\left(x+\frac{2}{x^{2}}\right)^{6}$

Giải

Hệ số của x^3 trong khai triển của biến thức:

$$\left(x+\frac{2}{x^{2}}\right)^{6} \text{ là } 2.C_{6}^{1}=2.\frac{6!}{1.(6-1)!}=2.\frac{6.5!}{5!}=12$$

. Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm n.

Giải

$(1-3x)^{n}=C_{n}^{0}1^{n}+C_{n}^{1}1^{n-1}(-3x)+C_{n}^{2}1^{n-2}(-3x)^{2}+....+C_{n}^{n}(-3x)^{n}$

$(n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$.

Hệ số của x^2 trong khai triển $(1-3x)^n$ là $9C_{n}^{2}$.

Ta có: $9C_{n}^{2}=90\Leftrightarrow C_{n}^{2}=10\Leftrightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}=10$

$$\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=10\Leftrightarrow n(n-1)=20$$

$$\Leftrightarrow n^{2}-n=20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}n=5 & \\ n=-4 & \text{(loại)}\end{array}\right.$$

4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^8$.

Giải

Giả sử hạng tử cần tìm là $C_8^k(x^3)^{8-k}.\left(\dfrac{1}{x}\right)^k = C_8^k x^{24-4k}$.

Vì hạng tử không chứa x nên $24 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy hạng tử đó là $C_8^6 = \dfrac{8!}{6!(8-6)!} = \dfrac{8.7.6!}{6!2!} = \dfrac{8.7}{2.1} = 28$

5. Từ khai triển biểu thức $(3x-4)^{17}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Giải

Tổng các hệ số của đa thức $(3x-4)^{17}$ là: $(3.1-4)^{17} = (-1)^{17} = -1$.

6. Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100;

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10 000;

c) $\sqrt{10}\left[\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} - \left(1-\sqrt{10}\right)^{100}\right]$ là một số nguyên.

Giải

a) $11^{10} - 1 = (1+10)^{10} - 1$

$$= (1 + C_{10}^1 10 + C_{100}^2 10^2 + \ldots + C_{10}^9 10^9 + C_{10}^{10}10^{10}) - 1$$

$$= (10^2 + C_{10}^2 10^2 + \ldots + C_{10}^9.10^9 + 10^{10}) \vdots\ 100$$

b) $101^{100} - 1 = (1+100)^{100} - 1$

$$= ((1 + C_{100}^1 100 + C_{100}^2 100^2 + \ldots + C_{100}^{99}10^{99} + C_{100}^{100}10^{100}) - 1$$

$$= (10^4 + C_{100}^2 10^4 + \ldots + C_{100}^{99}10^{99} + 10^{100}) \vdots\ 10^4$$

c) $\sqrt{10}[(1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}]$ là số nguyên.

Ta có

$$(1+\sqrt{10})^{100} = 1 + C_{100}^1\sqrt{10} + C_{100}^2(\sqrt{10})^2 + \ldots + C_{100}^{99}(\sqrt{10})^{99} + (\sqrt{10})^{100}$$

$$(1-\sqrt{10})^{100} = 1 - C_{100}^1\sqrt{10} + C_{100}^2(\sqrt{10})^2 - \ldots - C_{100}^{99}(\sqrt{10})^{99} + (\sqrt{10})^{100}$$

Từ đó $\sqrt{10}[(1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}]$

$$= \sqrt{10}[2C_{100}^1(\sqrt{10}) + 2C_{100}^3(\sqrt{10})^3 + \ldots + 2C_{100}^{99}(\sqrt{10})^{99}]$$

$$= 2\sqrt{10}[C_{100}^1\sqrt{10} + C_{100}^3(\sqrt{10})^3 + \ldots + C_{100}^{99}(\sqrt{10})^{99}]$$

$$= 2[10C_{100}^1 + 10C_{100}^3\sqrt{10} + \ldots + 10^{50}C_{100}^{99}) \in \mathbb{Z}.$$

§4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Phép thử – không gian mẫu

* ***Phép thử ngẫu nhiên*** là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả có thể của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

* Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử (ngẫu nhiên) gọi là ***không gian mẫu*** của phép thử, kí hiệu Ω (đọc là ômêga).

2. Biến cố

* **Biến cố** là một tập con của không gian mẫu Ω.

* Tập Ø được gọi là biến cố không (biến cố không thể). Tập Ω được gọi là biến cố chắc chắn.

3. Các phép toán trên các biến cố

* Cho A, B là biến cố liên quan đến một phép thử.

- Tập Ω \ A được gọi là biến cố đối của biến cố A, kiếu hiệu $\overline{A}$.
- Tập A ∪ B được gọi là hợp của hai biến cố A và B.
- Tập A ∩ B được gọi là giao của hai biến cố A và B.
- A ∩ B = Ø thì ta nói A và B xung khắc.

(Ghi chú biến cố A ∩ B còn được viết là A.B)

BÀI TẬP

1. Gieo đồng tiền ba lần

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố.

A: "Lần đầu xuất hiện mặt sấp"

B: "Mặt sấp xảy ra đúng một lần"

C: "Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần".

Giải

a) Không gian mẫu:

Ω = {SSS, SSN, SNS, NSS, SNN, NSN, NNS, NNN}

b) Biến cố A: "lần đầu xuất hiện mặt sấp".

A = {SSS, SSN, SNS, SNN}

Biến cố B: "Mặt sấp xảy ra đúng một lần".

$B = \{SNN, NSN, NNS\}$

Biến cố C: "Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần".

$C = \{SSN, NSS, SNS, NNS, NSN, SNN, NNN\} = \Omega \setminus \{SSS\}$

2. Gieo một con súc sắc hai lần:

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Phát biểu các biến cố sau dưới dạng mệnh đề:

$A = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$B = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$

$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

Giải

a) Không gian mẫu: $\Omega = \{(i, j) / 1 \le i, j \le 6\}$

b) Phát biểu dưới dạng mệnh đề:

Biến cố A = "Lần gieo đầu xuất hiện mặt 6 chấm".

Biến cố B = "Tổng số chấm trong hai lần gieo là 8".

Biến cố C = "Kết quả của hai lần gieo là như nhau".

3. Một hộp chứa bốn cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn".

B: "Tích các số trên hai thẻ là số chẵn".

Giải

a) Không gian mẫu:

$\Omega = \{1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\}$

b) Biến cố $A = \{(1; 3), (2; 4)\}$

Biến cố $B = \{(1; 2), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\} = \Omega \setminus \{(1; 3)\}$

4. Hai xạ thủ bắn vào bia. Ký hiệu A_k là biến cố: "Người thứ k bắn trúng", $k = 1, 2$.

a) Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2

A: "Không ai bắn trúng"

B: "Cả hai đều bắn trúng"

C: "Có đúng một người bắn trúng".

D: "Có ít nhất một người bắn trúng".

b) Chứng tỏ rằng $A = \overline{D}$; B và C xung khắc.

Giải

a) Biểu diễn các biến cố

$A = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$

$B = A_1 \cap A_2$

$C = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$

$D = A_1 \cup A_2$

b) $\overline{D}$ là biến cố "cả hai người đều bắn trượt".

Rõ ràng $\overline{D} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = A$

Cách khác $\overline{D} = \overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = A$

* Do $B \cap C = \emptyset$ nên B và C xung khắc.

5. Từ một hộp chứa 10 cái thẻ, trong đó các thẻ đánh số 1, 2, 3, 4, 5 màu đỏ, thẻ đánh số 6 màu xanh và các thẻ đánh số 7, 8, 9, 10 màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Ký hiệu A, B, C là các biến cố sau:

A: "Lấy được thẻ màu đỏ".

B: "Lấy được thẻ màu trắng".

C: "Lấy được thẻ ghi số chẵn".

Hãy biểu diễn các biến cố A, B, C bởi các tập con tương ứng của không gian mẫu.

Giải

a) Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) Biểu diễn biến cố:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ là biến cố: "Lấy được thẻ màu đỏ".

$B = \{7, 8, 9, 10\}$ là biến cố: "Lấy được thẻ màu trắng".

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ là biến cố: "Lấy được thẻ ghi số chẵn".

6. Gieo một đồng tiền liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp hoặc bốn lần ngửa thì dừng lại.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố:

A: "Số lần gieo không vượt quá ba".

B: "Số lần gieo là bốn".

Giải

a) Không gian mẫu: $\Omega = \{S, NS, NNS, NNNS, NNNN\}$.

b) Xác định biến cố A: "Số lần gieo không vượt quá ba"

là $A = \{S, NS, NNS\}$

B: "số lần gieo là bốn"

là $B = \{NNNS, NNNN\}$

7. Từ một hộp chứa năm quả cầu được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi lần một quả và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Chữ số sau lớn hơn chữ số trước".

B: "Chữ số trước gấp đôi chữ số sau".

C: "Hai chữ số bằng nhau".

Giải

a) Lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần, mỗi lần một quả và xếp thứ tự, nên mỗi lần lấy là chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử, không gian mẫu bao gồm các chỉnh hợp chập 2 của 5 chữ số:

$\Omega = \{12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54\}$

b) Xác định biến cố

* A: "Chữ số sau lớn hơn chữ số trước" là:

$A = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$

* B: "Chữ số trước gấp đôi chữ số sau: là:

$B = \{21, 42\}$

* C: "Hai chữ số bằng nhau là:

$C = \varnothing$.

§5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Giả sử A là một biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A, kí hiệu là P(A).

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}}$$

- **n(A)**: Số phần tử của A.
- **n(Ω)** Số các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

2. Tính chất của sác suất

Giả sử A và B các biến cố liên quan đến phép thử có một số kết quả đồng khả năng xảy ra, ta có.

Định lí: a) $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$.

b) $0 \le P(A) \le 1$, với mọi biến cố A.

c) Nếu A và B xung khắc thì

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (công thức cộng xác suất)

Hệ quả: Với mọi biến cố A, ta có $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. Các biến cố độc lập, công thức nhân xác suất

* Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến các phép thử có một số kết quả hữu hạn đồng khả năng xuất hiện.

Nếu sự xảy ra của biến cố A không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B và ngược lại thì ta nói hai biến cố đó độc lập.

* A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A.B) = P(A).P(B)$.

BÀI TẬP

1. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10".

B: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

Giải

a) Không gian mẫu:

$\Omega = \{(i; j) / 1 \leq i, j \leq 6\}$

b) Xác định biến cố:

A: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10" là:

$A = \{(4; 6), (6; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 5), (6; 6)\}$

B = "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần" là:

$B = \{(1; 5), (2; 5), (3; 5), (4; 5), (5; 5), (6; 5), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 6)\}$.

c) Tính P(A), P(B).

Ta có $n(\Omega) = 36$

$n(A) = 6; n(B) = 11$

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$

2. Có bốn tấm bìa được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên ba tấm.

a) Hãy mô tả không gian mẫu

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 8"

B: "Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp"

c) Tính P(A), P(B).

Giải

a) Do không phân biệt thứ tự trong cách rút nên không gian mẫu là tổ hợp chập 3 của 4 số, do đó

$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$

b) Xác định biến số

A: "Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 8" là:

$A = \{(1, 3, 4)\}$

B: 'Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp" là:

$B = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$

c) Ta có $n(\Omega) = 4$, $n(A) = 1$, $n(B) = 2$

Do đó $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

3. Một người chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để hai chiếc chọn được tạo thành một đôi.

Giải

Một đôi giày có hai chiếc khác nhau nên bốn đôi giày khác cỡ cho ta 8 chiếc giày khác nhau.

Do chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ 8 chiếc nên mỗi lần chọn là tổ hợp chập 2 của 8 phần tử

Vậy không gian mẫu có số phần tử là

$$n(\Omega) = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8.7.6!}{2!.6!} = \frac{56}{2} = 28 \text{ (phần tử)}$$

Gọi B là biến cố: "Hai chiếc chọn được tạo thành một đôi" ta có $n(B) = 4$.

Vậy xác suất để hai chiếc chọn được từ 4 đôi giầy tạo thành một đôi là:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

4. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Giả sử con súc sắc xuất hiện mặt b chấm. Xét phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$. Tính xác suất sao cho:

a) Phương trình có nghiệm;

b) Phương trình vô nghiệm;

c) Phương trình có nghiệm nguyên.

Giải

Không gian mẫu có 6 kết quả kết quả đồng khả năng

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n(\Omega) = 6$$

Gọi A, B, C là biến cố tương ứng với các câu a), b), c)

Phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta = b^2 - 8 \geq 0$, do đó ta có

$$A = \{b \in \Omega \,/\, b^2 - 8 \geq 0\} = \{3, 4, 5, 6\}$$

Do đó $n(A) = 4$ và $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

* $B = \overline{A}$ nên $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

* $C = \{3\}$ (chỉ có phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm nguyên)

$n(C) = 1$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

5. Từ bộ bài tú lơ khơ 52 con rút ngẫu nhiên cùng một lúc bốn con. Tính xác suất sao cho:

a) Cả bốn con đều là át;

b) Được ít nhất một con át;

c) Được hai con át và hai con K.

Giải

Chọn ngẫu nhiên 4 con bài trong số 52 lá, mỗi cách chọn là tổ hợp chập 4 của 52 phần tử, không gian mẫu là tập hợp có

$$n(\Omega) = C_{52}^4 = \frac{52!}{4!(52-4)!} = \frac{52.51.50.49.48!}{4!\,48!} = 270725 \text{ (phần tử)}$$

a) Gọi A là biến cố “cả 4 con là át”, ta có:

$$n(A) = C_4^4 = 1$$

Do đó $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{270725} \approx 0{,}0000037$

b) Gọi B là biến cố “Được ít nhất một con là át”

Do đó $\overline{B}$ là biến cố “Trong bốn con bài rút ra không có con át nào”

Ta có: $n(\overline{B}) = C_{48}^4 = \frac{48!}{4!\,44!} = 194580$

$$P(\overline{B}) = \frac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \frac{194580}{270725} \approx 0{,}7187$$

Suy ra $P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 1 - 0{,}7187 \approx 0{,}2813$

c) Gọi C là biến cố: “Được hai con là hai con K”

Ta có $n(C) = C_4^2.C_4^2 = 6.6 = 36$ (phần tử)

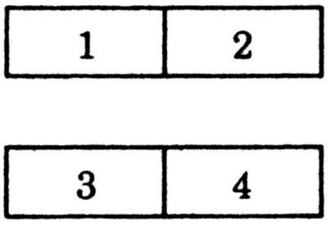
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{36}{270725} \approx 0{,}000133.$$

6. Hai bạn nam và hai bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:

a) Nam, nữ ngồi đối diện nhau;

b) Nữ ngồi đối diện nhau.

Giải



Để xác định, ta đánh số ghế như hình. Không gian mẫu là một hoán vị gồm 4 người, ta có $n(\Omega) = 4! = 24$

a) Gọi A là biến cố: "Nam nữ ngồi đối diện nhau"

- Đầu tiên xếp nam ngồi ở ghế (1), (2); có 2 cách chọn
- Sau khi nam đã ngồi ở ghế (1), (2); xếp tiếp nữ ngồi vào ghế (3) và (4): có 2 cách
- Hoán vị chỗ ngồi của hai bạn đối diện cho nhau có 2.2 cách.

Vậy theo qui tắc nhân, ta có số cách là 2.2.2.2 = 16 (cách) do đó:

$$n(A) = 16 \text{ và } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

b) Gọi B là biến cố "Nữ ngồi đối diện nhau"

Vì có 2 nam và 2 nữ xếp vào 4 ghế như hình vẽ nên khi nữ ngồi đối diện nhau thì lập tức nam cũng ngồi đối diện nhau. Mặt khác, các cách sắp xếp chỉ có thể là nam, nữ ngồi đối diện nhau hoặc nữ đối diện nhau, hoặc nam đối diện nhau, rõ ràng $B = \overline{A}$

Vậy $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

7. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả trắng, 4 quả đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả trắng, 6 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Kí hiệu:

A là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ nhất trắng".

B là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ hai trắng".

a) Xét xem A và B có độc lập không;

b) Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu;

c) Tính xác suất sao cho hai quả lấy ra khác màu.

Giải

Đánh số các quả cầu trong mỗi hộp từ 1 đến 10 sao cho các quả cầu trắng trong hộp thứ nhất có số từ 1 đến 6 và các quả cầu trắng trong hộp thứ hai có số từ 1 đến 4.

Ta có: $A = \{(i; j)/1 \le i \le 6,\ 1 \le j \le 10\}$

$B = \{(i, j)/1 \le i \le 10,\ 1 \le j \le 4\}$

a) Không gian mẫu có số $n(\Omega) = 10.10 = 100$ phần tử.

$n(A) = 6.10 = 60$ **phần tử,** $n(B) = 10.4 = 40$ **phần tử**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}.$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$$

Ta có: $A.B = \{(i; j) / 1 \le i \le 6; 1 \le j \le 4\}$

$n(A.B) = 6.4 = 24$ phần tử

Ta có: $P(A.B) = \dfrac{n(AB)}{n(\Omega)} = \dfrac{24}{100} = P(A).P(B)$

Vậy A, B là các biến cố độc lập.

b) Gọi C là biến cố: "Lấy được hai quả cầu cùng màu".

Rõ ràng A.B là biến cố "Hai quả lấy từ hai hộp cùng màu trắng".

$\overline{A}.\overline{B}$ là biến cố "Hai quả lấy từ hai hộp cùng màu đen".

Nên $C = A.B \cup \overline{A}.\overline{B}$.

Vì hai biến cố A.B, $\overline{A}.\overline{B}$ xung khắc và A, B là hai biến cố độc lập nên xác suất cho hai quả lấy ra cùng màu là:

$$P(C) = P(AB) + P(\overline{A}.\overline{B}) = P(A).P(B) + P(\overline{A}).P(\overline{B})$$

$$= \frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}.$$

c) Biến cố: "Hai quả cầu lấy ra khác màu" chính là $\overline{C}$, nên xác suất cho hai quả lấy ra khác màu là:

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

4. Có bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số được tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5,6 sao cho:

a)Các chữ số có thể giống nhau?

b)Các chữ số khác nhau?

Giải

Giả sử số tạo thành là $\overline{abcd}$

a) Vì số tạo thành các chữ số có thể giống nhau nên:

- Chọn chữ số hàng đơn vị $d \in \{0, 2, 4, 6\}$ có 4 cách chọn.
- Chọn chữ số hàng nghìn $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ có 6 cách chọn.
- Chọn chữ số hàng trăm $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ có 7 cách chọn.
- Chọn chữ số hàng chục $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ có 7 cách chọn.

Theo qui tắc nhân, ta có: 6.7.7.4 = 1176.

Vậy số số chẵn có 4 chữ số có thể giống nhau là 1176 số.

b) Có 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị d ∈ {0, 2, 4, 6}.

Trong mỗi cách chọn này ta cần chọn ba chữ số khác nhau trong 6 chữ số còn lại sắp xếp thứ tự tạo thành với d thành số chẵn có 4 chữ số khác nhau, số cách chọn là chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử.

Ta có: $C_6^3 = \frac{6!}{3!} = 6.5.4 = 120$ cách chọn

Theo qui tắc nhân, ta có 4.120 = 480 cách chọn.

Số các số có dạng $\overline{0bc2}$, $\overline{0bc4}$, $\overline{0bc6}$ với mỗi số dạng này còn lại 5 chữ số, ta phải chọn 2 chữ số khác nhau sắp xếp thứ tự tạo thành với a và d thành số chẵn có 4 chữ số khác nhau, số cách chọn là chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử, ta có:

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5.4 = 20 \text{ (cách chọn)}$$

Theo qui tắc nhân số các số có dạng trên là 3.20 = 60 số. Vậy số số chẵn có 4 chữ số khác nhau là: 480 – 60 = 420 số.

Vậy số số chẵn có 4 chữ số khác nhau là 420 số.

5. **Xếp ngẫu nhiên ba bạn nam và ba bạn nữ ngồi vào sáu ghế kê theo hàng ngang. Tìm xác suất sao cho:**

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ nhau;

b) Ba bạn nam ngồi cạnh nhau.

Giải

Vì cách sắp xếp là một hoán vị của 6 người nên $n(\Omega) = 6! = 720$.

a) Gọi A là biến cố "Nam, nữ ngồi xen kẽ nhau". Ta đánh số số ghế sau:

1	2	3	4	5	6

- Nếu bạn nam ngồi đầu (ghế số 1) thì có 3! cách sắp xếp nam ở vị trí ghế 1, 3, 5 và 3! cách sắp xếp bạn nữ ở vị trí ghế 2, 4, 6, như vậy có 3! 3! = 6.6 = 36 cách xếp nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.
- Tương tự nếu bạn nữ ngồi đầu bàn cũng có 36 cách xếp nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.

Tổng cộng có 36 + 36 = 72 cách sắp xếp.

Do đó $n(A) = 72$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Vậy xác suất để nam, nữ ngồi xen kẽ nhau là 0,1.

b) Gọi B là biến cố "Ba bạn nam ngồi gần nhau".

- Do chỉ có ba bạn nam, nên nếu xếp chỗ cho 3 bạn nam ngồi cạnh nhau, có 4 cách (các bạn ngồi ở các ghế (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5) (4, 5, 6) trong mỗi cách này có 3! cách chọn bạn nam (đổi chỗ cho nhau).
- Sau khi đã sắp xếp chỗ ngồi cho bạn nam, ta có 3! Cách sắp xếp chỗ cho 3 bạn nữ vào 3 chỗ còn lại.

Vậy theo qui tắc nhân, ta có 4.3!.3! = 144 cách.

$$n(B) = 144$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{144}{720} = 0{,}2$$

Vậy xác suất để ba bạn nam ngồi cạnh nhau là 0,2.

6. Từ một hộp có 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả. Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả cầu lấy ra cùng màu;

b) Có ít nhất một quả màu trắng.

Giải

Chọn ngẫu nhiên 4 quả trong hộp chứa 10 quả cầu (6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đen) nên số phần tử của không gian mẫu là tổ hợp chập 4 của 10 phần tử.

$$n(\Omega) = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.6!} = 210$$

a) Gọi A là biến cố "Bốn quả lấy ra cùng màu".

Ta có: Số cách lấy ra bốn quả cùng màu trắng: $C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$

Số cách lấy ra bốn quả cùng màu đen: $C_4^4 = 1$

Số cách lấy ra bốn quả cùng màu: n(A) = 15 + 1 = 16 (cách).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$$

b) Gọi B là biến cố "Trong 4 quả lấy ra có ít nhất một quả màu trắng" khi đó $\overline{B} = C_4^4 = 1$.

Từ đó $P(\overline{B}) = \frac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \frac{1}{210}$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}.$$

7. Gieo một con súc sắc ba lần. Tính xác suất sao cho mặt sáu chấm xuất hiện ít nhất một lần.

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{(a, b, c)/1 \le a, b, c \le 6\}$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6.6.6 = 216$ (phần tử đồng khả năng).

Gọi A là biến cố: "Không lần nào xuất hiện mặt 6 chấm".

Như vậy $\overline{A}$ là biến cố: "Ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm".

Số phần tử của A là $n(A) = 5.5.5 = 125$.

Do đó $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787$$

Suy ra $$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5787 \approx 0{,}4213.$$

8. Cho một lục giác đều ABCDEF. Viết các chữ cái A, B, C, D, E, F vào sáu cái thẻ. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Tìm xác suất sao cho đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ đó là:

a) Cạnh của lục giác;

b) Đường chéo của lục giác;

c) Đường chéo nối hai đỉnh đối diện của lục giác.

Giải

Không gian mẫu là tập hợp gồm các tổ hợp chập 2 của 6 phần tử ta có:

$$n(\Omega) = C_6^2 = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

a) Gọi A là biến cố "Đoạn thẳng là cạnh lục giác đều"

Ta có: $n(A) = 6$ (số cạnh của lục giác đều)

Do đó $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Vậy xác suất để các điểm ghi trên hai thẻ là cạnh lục giác đều là $\frac{2}{5}$

b) Gọi B là biến cố "Đoạn thẳng là đường chéo của lục giác đều".

Số đường chéo của lục giác đều: $15 - 6 = 9$ hay $n(B) = 9$.

Ta có $$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Vậy xác suất để các điểm ghi trên hai thẻ là đường chéo lục giác đều là $\frac{3}{5}$.

c) Gọi C là biến cố: "Đoạn thẳng là đường chéo nối hai đỉnh đối diện

Số đường chéo này là n(C) = 3

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Vậy xác suất để các điểm ghi trên hai thẻ là đường chéo của hai đỉnh đối diện là $\frac{1}{5}$.

9. Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất sao cho:

a) Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn;

b) Tích các số chấm trên hai con súc sắc là số lẻ.

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{(i; j) / 1 \le i \le 6; 1 \le j \le 6\}$

$$n(\Omega) = 6.6 = 36 \text{ phần tử}$$

a) Gọi A là biến cố hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn.

$$A = \{(i; j) / i, j = 2, 4, 6\}$$

$$n(A) = 3.3 = 9$$

Ta có: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Vậy xác suất để hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn là $\frac{1}{4}$.

b) Gọi B là biến cố "Tích các số trên hai con súc sắc là số lẻ".

Ta có: $B = \{(1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (5, 1); (5, 3); (5, 5)\}$

$n(B) = 9$

Do đó $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{9}{15} = \frac{1}{4}$

Vậy xác suất để tích các số chấm trên hai con súc sắc là số lẻ là $\frac{1}{4}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

10. Lấy hai con bài từ cổ bài tú lơ khơ 52 con. Số cách lấy là:

(A) 104; (B) 1326; (C) 450; (D) 2652.

Giải

Chọn (B)

Số cách chọn: $C_{52}^{2} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52.51}{2} = 1326$ cách

11. Năm người được xếp vào ngồi quanh một bàn tròn với năm ghế. Số cách xếp là:

(A) 50; (B) 100; (C) 120; (D) 24.

Giải

Chọn (C)

Số cách sắp xếp $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ cách.

12. Gieo con súc sắc hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là:

(A) $\frac{12}{36}$; (B) $\frac{11}{36}$; (C) $\frac{6}{36}$; (D) $\frac{8}{36}$.

Giải

Chọn (B)

Không gian mẫu $\Omega = \{(i, j)/1 \leq i, j \leq 6\}$

$$n(\Omega) = 6.6 = 36 \text{ phần tử}$$

Gọi B là biến cố "Không xuất hiện mặt sáu chấm"

Ta có: $B = \{(i; j)/1 \leq i, j \leq 5\}$

$$n(B) = 5.5 = 25 \text{ phần tử}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{25}{36}$$

Như vậy $\overline{B}$ là biến cố "Ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm"

Ta có: $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

13. Từ một hộp chứa ba quả cầu trắng và hai quả cầu đen lấy ngẫu nhiên hai quả. Xác suất để lấy được cả hai quả trắng là:

(A) $\frac{9}{30}$; (B) $\frac{12}{30}$; (C) $\frac{10}{30}$; (D) $\frac{6}{30}$.

Giải

Chọn (A)

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$

A là biến cố "Hai quả lấy ra là hai quả trắng"

Ta có: $n(A) = C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

Xác suất để "Hai quả lấy ra cùng màu là hai quả trắng" là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}.$$

14. Gieo ba con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba con như nhau là:

(A) $\frac{12}{216}$; (B) $\frac{1}{216}$; (C) $\frac{6}{216}$; (D) $\frac{3}{216}$.

Giải

Chọn (C)

Không gian mẫu là: $\Omega = \{(i; j; k)/1 \le i, j, k \le 6\}$

$$n(\Omega) = 6.6.6 = 216$$

Gọi A là biến cố để "số chấm xuất hiện trên ba con như nhau"

$$A = \{(i; j; k) / i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(A) = 6$$

Xác suất để "số chấm xuất hiện trên ba con như nhau" là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{216}.$$

15. Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là:

(A) $\frac{4}{16}$; (B) $\frac{2}{16}$; (C) $\frac{1}{16}$; (D) $\frac{6}{16}$.

Giải

Chọn (C)

Không gian mẫu (chỉ mặt sấp đánh số 1, chỉ mặt ngửa đánh số 2).

$$\Omega = \{(i; j; k; l) / 1 \le i, j, k, l \le 2\}$$

Số phần tử $n(\Omega) = 2^4 = 16$

A là biến cố: "Cả 4 lần đều xuất hiện mặt sấp)

$$A = \{(i; j; k; l) / i; j; k; l = 1\}$$

$$n(A) = 1$$

Xác suất để xảy ra: "Cả 4 lần đều xuất hiện mặt sấp"

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{16}.$$

Chương III.

DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUI NẠP TOÁN HỌC

NỘI DUNG CẦN NHỚ

* Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến **số tự nhiên n** $\in \mathbb{N}^*$, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$. Chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$ (phương pháp qui nạp toán học).

Bước 3: Kết luận mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng với $n \in N^*$ ta có các đẳng thức:

a) $2 + 5 + 8 + \ldots + 3n - 1 = \dfrac{n(3n+1)}{2}$;

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$;

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Giải

a) $2 + 5 + 8 + \ldots + 3n - 1 = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ (1)

* $n = 1$, ta có $2 = \dfrac{1(3.1+1)}{2}$, do đó (1) đúng.

Đặt $S_n = 2 + 5 + 8 + \ldots + 3n - 1$

* Giả thiết đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là:

$$S_k = 2 + 5 + 8 + \ldots + 3k - 1 = \frac{k(3k+1)}{2} \text{ (giả thiết qui nạp)}$$

Ta chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là:

$$S_{k+1} = 2 + 5 + 8 + \ldots + 3(k+1) - 1 = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$$

Thật vậy theo giả thiết qui nạp ta có

$$S_{k+1} = S_k + 3(k+1) - 1 = \frac{k(3k+1)}{2} + 3(k+1) - 1$$

$$= \frac{k(3k+1) + 6(k+1) - 2}{2} = \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + 3k + 4k + 4}{2} = \frac{3k(k+1) + 4(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(3k+4)}{2} = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$$

Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$ (2)

$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2^1 - 1}{2^1}$ (đúng)

Đặt $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

Giả sử đẳng thức (2) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là

$S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}$ (giả thiết qui nạp)

Ta chứng minh (2) cũng đúng khi $n = k + 1$ nghĩa là:

$$S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

Thật vậy, theo giả thiết qui nạp, ta có:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{(2^k - 1).2 + 1}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{2^k.2 - 1.2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

Vậy đẳng thức (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (3)

$n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$ (đúng)

Đặt $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

Giả sử đẳng thức (3) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là:

$$S_k = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \text{ (giả thiết qui nạp)}$$

Ta phải chứng minh (3) cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là:

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]}{6}$$

Thật vậy theo giả thiết qui nạp, ta có:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + 4k + 3k + 6]}{6} = \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Vậy đẳng thức (3) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

a) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3;

b) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9;

c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Giải

a) Đặt $S_n = n^3 + 3n^2 + 5n$

- Với $n = 1$, $S_1 = 1^3 + 3.1^2 + 5.1 = 9 \vdots 3$
- Giả sử với $k \geq 1$, $S_k = (k^3 + 3k^2 + 5k) \vdots 3$

Ta phải chứng minh $S_{k+1} \vdots 3$, thật vậy

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3(k^2 + 2k + 1) + 5k + 5 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 \\ &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3(k^2 + 3k + 3) \\ &= S_k + 3(k^2 + 3k + 3) \end{aligned}$$

Theo giả thiết qui nạp $S_k \vdots 3$, ngoài ra $3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$

Do đó $S_{k+1} \vdots 3$

Vậy $S_n \vdots 3$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Đặt $S_n = 4^n + 15n - 1$

- Với $n = 1$, $S_1 = 4 + 15.1 - 1 = 18 \vdots 9$
- Giả sử với $k \geq 1$, $S_k = (4^k + 15k - 1) \vdots 9$

Ta chứng minh $S_{k+1} \vdots 9$, thật vậy:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \\ &= 4.4^k + 15k + 14 \\ &= 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 \\ &= 4.S_k + 9(-5k + 2) \end{aligned}$$

Theo giả thiết qui nạp $S_k \vdots 9$, ngoài ra $9(-5k+2) \vdots 9$ nên $S_{k+1} \vdots 9$

Vậy $S_n \vdots 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

c) Đặt $S_n = n^3 + 11n$

- Với $n = 1$, $S_1 = 1^3 + 11.1 = 12 \vdots 6$
- Giả sử với $k \geq 1$, $S_k = (k^3 + 11k) \vdots 6$

Ta chứng minh $S_{k+1} \vdots 6$, thật vậy

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k+1)^3 + 11(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 \\ &= k^3 + 11k + 3k^2 + 3k + 12 \\ &= S_k + 3(k^2 + k + 4) \\ &= S_k + 3[k(k+1) + 4] \end{aligned}$$

Theo giả thiết qui nạp $S_k \vdots 6$, ngoài ra $k(k+1) + 4$ là số chẵn nên $3[k(k+1) + 4] \vdots 6$

Do đó $S_{k+1} \vdots 6$

Vậy $S_n \vdots 6$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có các bất đẳng thức:

a) $3^n > 3n + 1$; **b) $2^{n+1} > 2n + 3$.**

Giải

a) Chứng minh $3^n > 3n + 1$

- Với $n = 2$, $3^2 > 3.2 + 1$ (bất đẳng thức đúng).

- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$ nghĩa là $3^k \geq 3k + 1$ (1)

  Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

  Nghĩa là $3^{k+1} \geq 3(k + 1) + 1$, thật vậy:

  Từ (1) $3^k \geq 3k + 1$

  $\Leftrightarrow 3^k.3 \geq (3k + 1).3$ (nhân hai vế với 3)

  $\Leftrightarrow 3^{k+1} \geq 9k + 3$

  $\Leftrightarrow 3^{k+1} \geq 3k + 4 + 6k - 1$

  Vì $6k - 1 > 0$ nên $3^{k+1} > 3k + 4$

  hay $3^{k+1} > 3(k + 1) + 1$

  Vậy $3^n > 3n + 1$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

b) • Chứng minh $2^{n+1} > 2n + 3$

- Với $n = 2$, ta có: $2^3 > 2.2 + 3$ (Bất đẳng thức đúng).
- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, nghĩa là:

  $2^{k+1} > 2k + 3$ (2)

  Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh $2^{k+1+1} > 2(k + 1) + 3$, thật vậy:

  Từ (2) $2^{k+1} > 2k + 3$

  $\Leftrightarrow 2^{k+1}.\ 2 > (2k + 3).2$ (nhân hai vế với 2)

  $\Leftrightarrow 2^{k+1+1} > 4k + 6$

  $\Leftrightarrow 2^{k+1+1} > 2k + 5 + 2k + 1$

  Do $2k + 1 > 0$ nên $2^{k+1+1} > 2k + 5$

  Hay $2^{(k+1)+1} > 2(k + 1) + 3$

  Vậy $2^{n+1} > 2n + 3$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

4. Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính S_1, S_2, S_3;

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

Giải

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

Ta có: $S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

b) Từ câu a), ta dự đoán $S_n = \frac{n}{n+1}$

Chứng minh $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (1), với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng qui nạp.

- $n = 1$, $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1}$ (đúng)
- Giả sử khi $n = k \geq 1$ đẳng thức đúng, nghĩa là:

$$S_k = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là:

$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$, thật vậy:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

Đẳng thức (1) đúng với $n = k + 1$

Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Chứng minh số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Giải

- Với $n = 4$ ta có tứ giác.
  - + Số đường chéo của tứ giác là 2.
  - + Số đường chéo của tứ giác tính theo công thức là $\frac{4(4-1)}{2} = 2$.

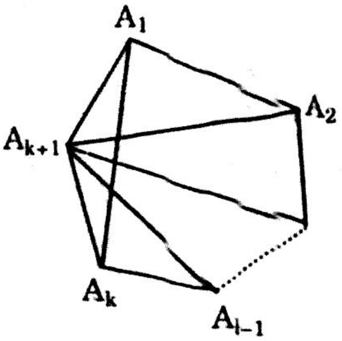
Vậy khẳng định đúng với $n = 4$.

- Giả sử đa giác lồi k cạnh (k ≥ 4) có số đường chéo là $\frac{k(k-3)}{2}$ (giả thiết qui nạp)

Ta chứng minh đa giác lồi có k + 1 cạnh, có số đường chéo là $\frac{(k+1)(k+1-3)}{2}$, thật vậy.

Với đa giác lồi k + 1 cạnh có k + 1 đỉnh $A_1, A_2, A_3, \dots A_k, A_{k+1}$

- Nối A_1 và A_k ta được đa giác k cạnh $A_1A_2 \dots k_k$ có $\frac{k(k-3)}{2}$ đường chéo (giả thiết qui nạp)
- Nối A_{k+1} với các đỉnh $A_2, \dots, A_{k-1}$ ta được thêm (k – 2) đường chéo nữa
- Ngoài ra A_1A_k cũng là một đường chéo do đó số đường chéo của đa giác k + 1 cạnh là



$$\frac{k(k-3)}{2} + k - 2 + 1 = \frac{(k^2 - 3k + 2k - 4 + 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k-2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}$$

Vậy khẳng định đúng với n = k + 1.

Vậy bài toán đã được chứng minh.

§2. DÃY SỐ

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Định nghĩa:

- Mỗi hàm số u xác định trên tập số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số vô hạn*** (gọi tắt là dãy số, kí hiệu:

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

- Ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ trong đó u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n
- Mỗi hàm số u xác định trên tập M = {1, 2, 3, ..., m} với $n \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số hữu hạn.***

2. Cách cho dãy số

Các dãy số có thể cho bằng nhiều cách.

- **Dãy số cho bởi công thức của số hạng tổng quát.**

Ví dụ: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$

- **Dãy số cho bằng phương pháp mô tả**

Ví dụ: Cho dãy số (u_n) với u_n là giá trị gần đúng thiếu của số π với sai số tuyệt đối 10^{-n}, ta sử dụng phương pháp mô tả:

$u_1 = 3,1$; $u_2 = 3,14$; $u_3 = 3,141$; $u_4 = 3,1415$; ...

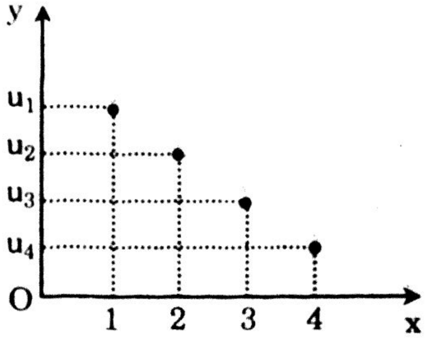
- **Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi.**
  - Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).
  - Cho hệ thức truy hồi (hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Ví dụ: Dãy số "Phi–bô–na–xi" là dãy (u_n), được xác định.

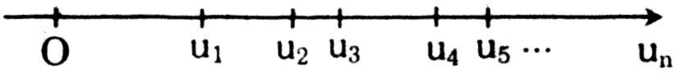
$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ với } n \geq 3 \end{cases}$$

3. Biểu diễn hình học của dãy số

- Trong mặt phẳng tọa độ, dãy số (u_n) có thể được biểu diễn bằng các điểm có tọa độ $(n; u_n)$.



- Có thể biểu diễn các số hạng của dãy số (u_n) trên trục số



4. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

Cho dãy số (u_n).

- (u_n) được gọi là ***dãy số tăng*** nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) được gọi là ***dãy số giảm*** nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
- (u_n) được gọi là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- (u_n) được gọi là ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- (u_n) được gọi là ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

BÀI TẬP

1. Viết năm số hạng đầu của dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức:

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n - 1}$; b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$; c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; d) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

Giải

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n - 1}$

Năm số hạng đầu của dãy số $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{2}{3}$, $u_3 = \dfrac{3}{7}$; $u_4 = \dfrac{4}{15}$; $u_5 = \dfrac{5}{31}$.

b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

Năm số hạng đầu của dãy số là $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{3}{5}$, $u_3 = \dfrac{7}{9}$; $u_4 = \dfrac{15}{17}$, $u_5 = \dfrac{31}{33}$.

c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Năm số hạng đầu của dãy số là $u_1 = 2$; $u_2 = \dfrac{9}{4}$, $u_3 = \dfrac{64}{27}$, $u_4 = \dfrac{625}{256}$,

$u_5 = \dfrac{7776}{3125}$

d) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

Năm số hạng đầu của dãy số là $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $u_3 = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$;

$u_4 = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$; $u_5 = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

2. Cho dãy số (u_n), biết: $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n + 3$ với $n \geq 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số;

b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp: $u_n = 3n - 4$.

Giải

$u_1 = -1$, $u_{n+1} = u_n + 3$ với $n \geq 1$

a) Năm số hạng đầu của dãy số:

$u_1 = -1$; $u_2 = u_1 + 3 = 2$; $u_3 = u_2 + 3 = 5$

$u_4 = u_3 + 3 = 8$; $u_5 = u_4 + 3 = 11$.

b) Chứng minh $u_n = 3n - 4$

- $n = 1$, $u_1 = 3.1 - 4 = -1$ (đúng)
- Giả sử khi $n = k \geq 1$, ta có $u_k = 3k - 4$ (giả thiết qui nạp)

  Ta chứng minh $u_{k+1} = 3(k + 1) - 4 = 3k - 1$, thật vậy.

  Từ giả thiết qui nạp và theo công thức của dãy số

  Ta có: $u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 4 + 3 = 3k - 1 = 3(k + 1) - 4$

  Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3n - 4$.

3. Dãy số (u_n), bởi: $u_1 = 3$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}, n \geq 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số;

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Giải

a) Năm số hạng đầu của dãy số là:

$u_1 = 3$; $u_2 = \sqrt{1 + 3^2} = \sqrt{10}$; $u_3 = \sqrt{1 + 10} = \sqrt{11}$,

$u_4 = \sqrt{1 + 11} = 2\sqrt{3}$; $u_5 = \sqrt{1 + 12} = \sqrt{13}$

b) Ta có: $u_1 = 3 = \sqrt{9} = \sqrt{1 + 8}$

$u_2 = \sqrt{10} = \sqrt{2 + 8}$

$u_3 = \sqrt{11} = \sqrt{3 + 8}$

$u_4 = \sqrt{12} = \sqrt{4 + 8}$

$u_5 = \sqrt{13} = \sqrt{5 + 8}$

Dự đoán $u_n = \sqrt{n + 8}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Chứng minh (1) bằng qui nạp:

- Với $n = 1$, $u_1 = \sqrt{1 + 8}$, công thức (1) đúng.
- Giả sử $u_k = \sqrt{k + 8}$ với $k \geq 1$

Ta chứng minh công thức (1) đúng với n = k + 1, thật vậy:

$$u_{k+1} = \sqrt{1 + u_k^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{k+8})^2} = \sqrt{(k+1)+8}$$

Công thức (1) đúng với n = k + 1

Vậy $u_n = \sqrt{n+8}$ với mọi $n \subset \mathbb{N}^*$

4. **Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết:**

a) $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$; b) $u_n = \dfrac{n -}{n +}$;

c) $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$; d) $u_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$.

Giải

a) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{n+1} - 2\right) - \left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

Do $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ nên $u_{n+1} - u_n < 0$ hay $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

b) Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1-1}{n+1+1} - \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n-1}{n+1}$

$$= \frac{n^2 + n - (n^2 + n - 2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

c) Các số hạng của dãy số vì có thừa số $(-1)^n$ nên dấu đan nhau (Ví dụ $u_1 = -3$; $u_2 = 5$, $u_3 = -9$...).

Vậy dãy số (u_n) đã cho không tăng, không giảm.

d) Xét hiệu:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{5(n+1)+2} - \frac{2n+1}{5n+2} = \frac{2n+3}{5n+7} - \frac{2n+1}{5n+2}$$

$$= \frac{10n^2 + 19n + 6 - 10n^2 - 19n - 7}{(5n+7)(5n+2)} = \frac{-1}{(5n-7)(5n+2)} < 0),$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

5. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn?

a) $u_n = 2n^2 - 1$;

b) $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$;

c) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$;

d) $u_n = \sin n + \cos n$.

Giải

a) $u_n = 2n^2 - 1$

- Ta có $u_n = 2n^2 - 1 \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ do đó dãy số (u_n) bị chặn dưới.
- Khi n lớn vô cùng, u_n lớn vô cùng do đó dãy số (u_n) không bị chặn trên.

b) $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$

Ta có $u_n = \frac{1}{n(n+2)} > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác, $n \geq 1$ nên $n^2 \geq 1$ và $2n \geq 2$ do đó $n(n + 2) = n^2 + 2n \geq 3$.

Suy ra $u_n = \frac{1}{u(n+2)} \leq \frac{1}{3}$

Vậy dãy số đã cho bị chặn vì $0 < u_n \leq \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$

- Do $n \geq 1$ nên $2n^2 - 1 > 0$, suy ra $\frac{1}{2n^2 - 1} > 0$
- $n^2 \geq 1$ nên $2n^2 \geq 2$ hay $2n^2 - 1 \geq 1$, suy ra $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1} \leq 1$

Vậy dãy số đã cho bị chặn vì $0 < u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) $u_n = \sin n + \cos n$

Ta có $|\sin n + \cos n| = \sqrt{2}\left|\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \sqrt{2}$

Suy ra $-\sqrt{2} \leq \sin n + \cos n \leq \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{R}$.

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên kết quả cho ta

$$-\sqrt{2} < \sin n + \cos n < \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $-\sqrt{2} < u_n < \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nghĩa là dãy số (u_n) đã cho bị chặn.

§3. CẤP SỐ CỘNG

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng bằng số đứng ngay trước nó cộng với số không đổi d (d gọi là ***công sai*** của cấp số cộng).

Với cấp số cộng (u_n) công sai d, ta có:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + d} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

d = 0 thì cấp số cộng là *dãy số không đổi*.

2. Số hạng tổng quát

Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1, công sai là d thì số hạng thứ n (số hạng tổng quát) là:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d} \text{ với } n \geq 2$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng

* Trong cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó.

$$\boxed{u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n). Ta có:

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}} \text{ hay } \boxed{S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}}$$

BÀI TẬP

1. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 5 - 2n$; b) $u_n = \frac{n}{2} - 1$; c) $u_n = 3^n$; d) $u_n = \frac{7 - 3n}{2}$.

Giải

a) Ta xét hiệu $u_{n+1} - u_n = [5 - 2(n+1)] - (5 - 2n)$

$$= 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2$$

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = 5 - 2n$ là một cấp số cộng, công sai là $d = -2$.

Số hạng đầu là $u_1 = 3$.

b) Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} - 1 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)$

$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - 1 - \frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{2} - 1$ là một cấp số cộng, công sai là $d = \frac{1}{2}$. Số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

c) Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 3^n = 3.3^n - 3^n = 2.3^n$

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$ không phải là cấp số cộng.

d) Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \frac{7-3(n+1)}{2} - \frac{7-3n}{2} = \frac{7-3n-3-7+3n}{2} = -\frac{3}{2}$

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \frac{7-3n}{2}$ là một cấp số cộng, công sai là $d = -\frac{3}{2}$. Số hạng đầu $u_1 = \frac{7-3}{2} = 2$.

2. Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau biết:

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$.

Giải

a) Sử dụng $u_n = u_1 + (n-1)d$

Do $u_1 - u_3 + u_5 = u_1 - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = u_1 + 2d$

$u_1 + u_6 = u_1 + u_1 + 5d = 2u_1 + 5d$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ d = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$

Vậy cấp số cộng này có số hạng đầu 16, công sai −3.

b) Do $u_7 - u_3 = u_1 + 6d - (u_1 + 2d) = 4d$

$u_2.u_7 = (u_1 + d)(u_1 + 6d)$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4d = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 3 \text{ hoặc } u_1 = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} d = 2 \\ u_1 = -17 \end{cases}$$

Vậy ta có hai cấp số cộng thỏa hệ phương trình,

Số hạng đầu và công sai là: $u_1 = 3$ và $d = 2$ hoặc $u_1 = -17$ và $d = 2$.

3. Trong các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp năm đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n.

a) Hãy viết các hệ thức liên hệ giữa các đại lượng đó. Cần phải biết ít nhất mấy đại lượng để có thể tìm được các đại lượng còn lại?

b) Lập bảng theo mẫu sau và điền số thích hợp vào ô trống:

u_1	d	u_n	n	S_n
–2		55	20	
	–4		15	120
3	$\frac{4}{27}$	7		
		17	12	72
2	–5			–205

Giải

a) Cần biết ít nhất ba đại lượng trong năm đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n, ta mới tính được hai đại lượng còn lại.

b) Tính rồi điền vào bảng.

Hàng 1: Biết $u_1 = -2$; $u_n = 55$, $n = 20$. Tính d và S_n

Ta có: $u_{20} = u_1 + (20 - 1)d = u_1 + 19d$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{u_{20} - u_1}{19} = \frac{55 + 2}{19} = 3$$

$$S_n = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(-2 + 55)}{2} = 530$$

Hàng 2: Biết $d = -4$; $n = 15$, $S_n = 120$. Tính u_1, u_n.

Ta có: $u_{15} = u_1 + 14d = u_1 - 56 \Rightarrow u_{15} - u_1 = -56$

$$\frac{n(u_1 + u_{15})}{2} = S_{15} \Rightarrow \frac{15(u_1 + u_{16})}{2} = 120$$

$$\Rightarrow u_1 + u_{15} = 16$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_{15} - u_1 = -56 \\ u_1 + u_{15} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_{15} = -40 \\ u_1 + u_{15} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{15} = -20 \\ u_1 = 36 \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 36$, $u_{15} = -20$.

Ghi chú: Có thể sử dụng công thức: $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

Ta có: $S_{15} = 15u_1 + \frac{15.14}{2}.(-4)$

$\Rightarrow \quad 120 = 15u_1 - 420$

$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{120+420}{15} = 36$. Sau đó tính u_{15}

$u_{15} = u_1 + 14d = 36 + 14(-4) = -20$

Hàng 3: Biết $u_1 = 3,\ d = \frac{4}{27},\ u_n = 7$. Tính n, S_n.

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad 7 = 3 + (n-1).\frac{4}{27}$

$\Rightarrow \quad n - 1 \Rightarrow \frac{4.27}{4} \Rightarrow n = 28$

$$S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2} = \frac{28(3+7)}{2} = 140$$

Vậy n = 28, $S_n = 140$

Hàng 4: Biết $u_n = 17$, n = 12, $S_n = 72$. Tính u_1, d.

Sử dụng $S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2}$

Ta có: $S_n = \frac{12(u_1+17)}{2} \Rightarrow 72 = 6(u_1 + 17)$

$\Rightarrow u_1 = 12 - 17 = -5$

$* \ u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow 17 = -5 + 11d$

$\Rightarrow 11d = 22 \Rightarrow d = 2$

Vậy $u_1 = -5$, d = 2.

Hàng 5: Biết $u_1 = 2$, d = –5, $S_n = -205$. Tính u_n, n.

Sử dụng công thức: $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}.d$

$\Rightarrow \quad -205 = 2n + \frac{n(n-1)}{2}.(-5)$

$\Rightarrow \quad -410 = 4n - 5n^2 + 5n$

$\Rightarrow \quad 5n^2 - 9n - 410 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -\frac{41}{5} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với n = 10, $u_n = u_1 + 9d = 2 + 9(-5) = -43$.

Vậy n = 10, $u_n = -43$.

4. Mặt sàn tầng một của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 cm. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, mỗi bậc cao 18 cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của một bậc tùy ý so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Giải

a) Công thức tìm độ cao của một bậc tùy ý.

Gọi h_n là chiều cao bậc thứ n so với mặt sàn.

$h_n = 0{,}5 + n.0{,}18$ (m)

b) Chiều cao của sàn tầng hai so với mặt sân

$h_{21} = 0{,}5 + 21.0{,}18 = 4{,}28$ (m)

5. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng, nếu nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Giải

Tiếng chuông báo giờ từ 0 giờ đến 12 giờ trưa là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Đây là cấp số cộng số hạng đầu 1, công sai 1, số hạng thứ 12 là 12, ta có số tiếng chuông báo giờ là:

$$S = 1 + 2 + ... + 12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78 \text{ (tiếng chuông)}$$

§4. CẤP SỐ NHÂN

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Định ngĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q (q gọi là **công bội**).

Với cấp số nhân (u_n), công bội q, ta có:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n.q, \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

Đặc biệt: • q = 0, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, 0, ..., 0, ...$

• q = 1, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$

• $u_1 = 0$, với mọi q cấp số nhân có dạng 0, 0, 0, ..., 0, ...

2. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1, công bội q thì số hạng tổng quát u_n (số hạng thứ n) là:

$$\boxed{u_n = u_1.q^{n-1}} \text{ với } n \geq 2$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Trong một cấp số nhân, bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$\boxed{u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân cho cấp số nhân (u_n), ta có:

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}} \text{ với } q \neq 1$$

BÀI TẬP

1. Chứng minh các dãy số $\left(\frac{3}{5}.2^n\right)$, $\left(\frac{5}{2^n}\right)$, $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ là cấp số nhân.

Giải

a) Xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{3}{5}.2^{n+1}\right)}{\left(\frac{3}{5}.2^n\right)} = \frac{2^n.2}{2^n} = 2$ hay $u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in N^*$

Vậy dãy số đã cho là cấp số nhân, công bội là 2.

b) Xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^n.2} = \frac{1}{2}$ hay $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n, \forall n \in N^*$

Vậy dãy số đã cho là một cấp số nhân, công bội $\frac{1}{2}$.

c) Lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n.\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2}$ hay $u_{n+1} = -\frac{1}{2}.u_n, \forall n \in N^*$

Vậy dãy số đã cho là một cấp số nhân, công bội $-\frac{1}{2}$.

2. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q.

a) Biết $u_1 = 2, u_6 = 486$. Tìm q;

b) Biết $q = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm u_1;

c) Biết $u_1 = 3, q = -2$. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy?

Giải

a) $u_1 = 2$, $u_6 = 486$. Tính q.

Ta có $u_6 = u_1.q^5 \Rightarrow 486 = 2.q^5 \Rightarrow q^5 = 243 \Rightarrow q = 3$

Vậy công bội của cấp số nhân là q = 3.

b) $q = \frac{2}{3}$, $u_4 = \frac{8}{21}$. Tính u_1

Ta có $u_4 = u_1.q^3 \Rightarrow \frac{8}{21} = u_1.\left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{8}{21} = u_1.\frac{8}{27} \Rightarrow u_1 = \frac{27}{21} = \frac{9}{7}$

c) $u_1 = 3$, $q = -2$; 192 là số hạng thứ mấy?

Ta có $u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow 192 = 3.(-2)^{n-1}$

$$\Rightarrow 64 = (-2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow (-2)^{n-1} = (-2)^6$$

$$\Rightarrow n - 1 = 6$$

$$\Rightarrow n = 7$$

Vậy 192 là số hạng thứ 7.

3. Tìm các số hạng của cấp số nhân (u_n) có năm số hạng, biết:

a) $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$;

b) $u_4 - u_2 = 25$ và $u_3 - u_1 = 50$.

Giải

a) Ta có $u_3 = u_1.q^2 \Rightarrow u_1.q^2 = 3$ và $u_5 = u_1.q^4 \Rightarrow u_1.q^4 = 27$

$$\Rightarrow (u_1.q^2).q^2 = 27$$

$$\Rightarrow 3.q^2 = 27 \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$$

Từ đó $u_1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Vậy ta có cấp số nhân là: $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27 và $\frac{1}{3}$; −1; 3; −9; 27.

b) Ta có: $u_4 - u_2 = u_1q^3 - u_1q = u_1q(q^2 - 1) = 25$ (1)

$u_3 - u_1 = u_1q^2 - u_1 = u_1(q^2 - 1) = 50$ (2)

Thế (2) vào (1) $50q = 25 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

Từ (2) ta có: $u_1.\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 50 \Rightarrow u_1.\left(-\frac{3}{4}\right) = 50 \Rightarrow u_1 = -\frac{200}{3}$.

Vậy ta có cấp số nhân là: $-\frac{200}{3}$; $-\frac{100}{3}$; $-\frac{50}{3}$; $-\frac{25}{3}$; $-\frac{25}{6}$.

4. Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng sau là 62.

Giải

Các số hạng của cấp số nhân: $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.

Theo giả thiết: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31 & (1) \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62 & (2) \end{cases}$

Nhân hai vế của (1) với q, ta được: (q là công bội của cấp số nhân).

$$u_1q + u_2q + u_3q + u_4q + u_5q = 31.q$$

hay $u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 31.q$

Suy ra $62 = 31.q$

Vậy $q = 2$

Vì $S_5 = \frac{u_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{u_1(1 - 2^5)}{-1} = 31$

Nên $u_1(-31) = -31$ hay $u_1 = 1$

Vậy ta có cấp số nhân: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

5. Tỉ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì sau 5 năm, 10 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu?

Giải

Gọi n là số dân của tỉnh, $n \in \mathbb{N}^*$.

Sau một năm số dân tăng thêm là 1,4%n.

Số dân của tỉnh vào năm sau là n + 1,4%n = 101,4%n.

Số dân của tỉnh sau mỗi năm lập thành cấp số nhân:

$$n, \frac{101,4}{100}n, \left(\frac{101,4}{100}\right)^2 n, \ldots$$

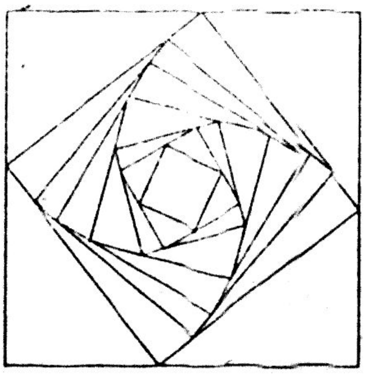
Giả sử n = 1,8 (triệu người) thì sau 5 năm, số dân của tỉnh là:

$$\left(\frac{101,4}{100}\right)^5 .1,8 \approx 1,9 \text{ (triệu người)}$$

Và sau 10 năm số dân của tỉnh là:

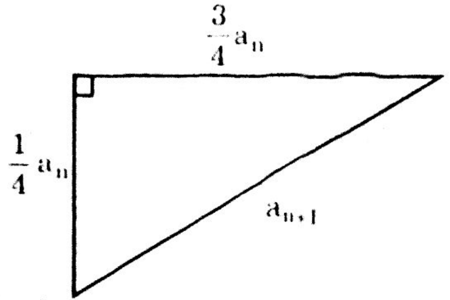
$$\left(\frac{101,4}{100}\right)^{10} .1,8 \approx 2,1 \text{ (triệu người)}.$$

6. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia các cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2. Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp như trên để được hình vuông C_3,... Tiếp tục quá trình trên, ta nhận được dãy các hình vuông C_1, C_2, C_3, ,..., C_n,...



Gọi a_n là độ dài cạnh của hình vuông C_n. Chứng minh dãy số (a_n) là một cấp số nhân.

Giải



Xét dãy (a_n), trong đó $a_1 = 4$.

Giả sử hình vuông có cạnh c_n có độ dài a_n.

Tính ba cạnh a_{n+1} của hình vuông c_{n+1}.

Ta có $a_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a_n\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a_n\right)^2} = a_n\frac{\sqrt{10}}{4}$, $\forall n \in N^*$

Vậy dãy số (a_n) là cấp số nhân có $u_1 = 4$, công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Khi nào thì cấp số cộng là dãy số tăng, dãy số giảm?

Giải

Do $u_{n+1} - u_n = d$

* Nếu $d > 0$, $\forall n \in N^*$ thì $u_{n+1} > u_n$: cấp số cộng tăng.

* Nếu $d < 0$, $\forall n \in N^*$ thì $u_{n+1} < u_n$: cấp số cộng giảm.

2. Cho cấp số nhân có $u_1 < 0$ và công bội q.

Hỏi các số hạng khác sẽ mang dấu gì trong các trường hợp sau:

a) $q > 0$; b) $q < 0$.

Giải

Ta có $u_n = u_1.q^{n-1}$, $\forall n \in N^*$.

a) Nếu $u_1 < 0$ và $q > 0$ thì $u_n < 0$, $\forall n \in N^*$.

b) Nếu $u_1 < 0$ và $q < 0$, $\forall n \in N^*$ thì các số hạng mang thứ tự chẵn là số dương, còn các số hạng mang thứ tự lẻ là số âm.

3. Cho hai cấp số cộng có cùng số các số hạng. Tổng các số hạng tương ứng của chúng có lập thành một cấp số cộng không? Vì sao? Cho ví dụ minh họa.

Giải

Cho hai cấp số cộng (u_n) và (v_n) có cùng số số hạng:

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ có công sai là d_1

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ có công sai là d_2

Ta có $u_n + v_n = u_1 + (n-1)d_1 + v_1 + (n-1)d_2$

$= (u_1 + v_1) + (n-1)(d_1 + d_2), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số $(u_n + v_n)$ là cấp số cộng, công sai là $d_1 + d_2$.

4. Cho hai cấp số nhân có cùng số các số hạng. Tích các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số nhân không? Vì sao? Cho một ví dụ minh họa.

Giải

Cho hai cấp số nhân (u_n) và (v_n) có cùng số số hạng.

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ có công bội q_1

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ có công bội q_2

Ta có $u_n.v_n = u_1.q_1^{n-1}.v_1.q_2^{n-1}$

$= (u_1.v_1)(q_1.q_2)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_nv_n) cũng là cấp số nhân, có công bội là $q_1.q_2$.

5. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $13^n - 1$ chia hết cho 6; b) $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9.

Giải

a) Đặt $S_n = 13^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$

- $n = 1, S_1 = 13 - 1 = 12 \,\vdots\, 6$
- Giả sử $S_k = (13^k - 1) \,\vdots\, 6$ với $k \geq 1$

Ta chứng minh $S_{k+1} \,\vdots\, 6$, thật vậy:

$S_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13.13^k - 1 = 13(13^k - 1) + 12 = 13.S_k + 12$

Do $S_k \,\vdots\, 6$ và $12 \,\vdots\, 6$ nên $S_{k+1} \,\vdots\, 6$

Vậy $S_n = (13^n - 1) \,\vdots\, 6, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Đặt $S_n = 3n^3 + 15n$, $n \in \mathbb{N}^*$

- $n = 1$, $S_1 = 3.1^3 + 15.1 = 18 \vdots 9$
- Giả sử $S_k = (3k^3 + 15k) \vdots 9$ với $k \geq 1$

Ta chứng minh $S_{k+1} \vdots 9$, thật vậy:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 3(k+1)^3 + 15(k+1) = 3(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 15k + 15 \\ &= 3k^3 + 9k^2 + 9k + 3 + 15k + 15 \\ &= (3k^3 + 15k) + 9(k^2 + k + 2) \\ &= S_k + 9(k^2 + k + 2) \end{aligned}$$

Do $S_k \vdots 9$ và $9(k^2 + k + 2) \vdots 9$ nên $S_{k+1} \vdots 9$

Vậy $S_n = (3n^3 + 15n) \vdots 9$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

6. Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_n - 1$ (với $n \geq 1$).

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Giải

a) $u_1 = 2$; $u_2 = 2u_1 - 1 = 3$; $u_3 = 2u_2 - 1 = 5$

$u_4 = 2u_3 - 1 = 9$; $u_5 = 2u_4 - 1 = 17$

b) Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- $n = 1$, $u_1 = 2^{1-1} + 1 = 2$ (đúng)
- Giả sử, $u_k = 2^{k-1}$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+1-1} + 1 = 2^k + 1$, thật vậy:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 \\ &= 2.2^{k-1} + 2 - 1 = 2^k + 1 \end{aligned}$$

Vậy $u_n = 2^{n-1} + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

7. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của các dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$; b) $u_n = (-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}$; c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Giải

a) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1) + \dfrac{1}{n+1} - \left(n + \dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

$$= 1 - \frac{1}{n(n+1)} > 0 \left(\text{vì } \frac{1}{n(n-1)} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*\right)$$

Do đó $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

Ta có $n + \frac{1}{n} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Khi n lớn vô cùng thì u_n lớn vô cùng nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

b) $u_n = (-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

Dãy số (u_n) có dấu đan nhau vì có nhân tử $(-1)^{n-1}$.

$(u_1 = \sin 1,\ u_2 = -\sin\frac{1}{2},\ u_3 = \sin\frac{1}{3},\ u_4 = -\sin\frac{1}{4})$ nên không tăng, không giảm,

Ta có $|u_n| = \left|(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}\right| \leq 1$ hay $-1 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(do $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$) hay $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) giảm.

Mặt khác. $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{1+1} + \sqrt{1} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{2} + 1$$

nên $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

và $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

8. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết:

a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$.

Giải

a) Do $5u_1 + 10u_5 = 5u_1 + 10(u_1 + 4d) = 15u_1 + 40d$

Và $S_4 = 4u_1 + \frac{4(3)}{2}d = 4u_1 + 6d$

Nên từ đó: $\begin{cases}5u_1 + 10u_5 = 0\\ S_4 = 14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}15u_1 + 40d = 0\\ 4u_1 + 6d = 14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3u_1 + 8d = 0\\ 2u_1 + 3d = 7\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}7d = -21\\ 2u_1 + 3d = 7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d = -3\\ u_1 = 8\end{cases}$$

Vậy $u_1 = 8$; $d = -3$.

b) Ta có: $u_7 + u_{15} = u_1 + 6d + u_1 + 14d = 2u_1 + 20d$

$$u_4^2 + u_{12}^2 = (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2$$

$$= u_1^2 + 6u_1d + 9d^2 + u_1^2 + 22u_1d + 121d^2$$

$$= 2u_1^2 + 28u_1d + 130d^2$$

Từ đó: $\begin{cases}u_7 + u_{15} = 60\\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2u_1 + 20d = 60\\ 2u_1^2 + 28u_1d + 130d^2 = 1170\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u_1 + 10d = 30 & (1)\\ u_1^2 + 14u_1d + 65d^2 = 585 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) $u_1 = 30 - 10d$, thế vào phương trình (2):

$$(30 - 10d)^2 + 14(30 - 10d)d + 65d^2 - 585 = 0$$

$$\Leftrightarrow 900 - 600d + 100d^2 + 420d - 140d^2 + 65d^2 - 585 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 - 180d + 315 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5d^2 - 36d + 63 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}d = 3\\ d = \dfrac{21}{5}\end{array}\right.$$

- $d = 3 \Rightarrow u_1 = 0$
- $d = \dfrac{21}{5} \Rightarrow u_1 = -12$

Vậy ta có hai cấp số cộng có số hạng đầu và công sai là:

$$u_1 = 0,\ d = 3 \text{ và } u_1 = -12,\ d = \frac{21}{5}.$$

9. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân (u_n), biết:

a) $\begin{cases}u_6 = 192\\ u_7 = 384\end{cases}$; b) $\begin{cases}u_4 - u_2 = 72\\ u_5 - u_3 = 144\end{cases}$; c) $\begin{cases}u_2 + u_5 - u_4 = 10\\ u_3 + u_6 - u_5 = 20\end{cases}$

Giải

a) Do $u_7 = u_6.q \Rightarrow 384 = 192.q \Rightarrow q = 2$

Và $u_6 = u_1.q^5 \Rightarrow 196 = u_1.2^5 \Rightarrow u_1 = \dfrac{192}{32} = 6$

Vậy $u_1 = 6$, $q = 2$.

b) Do $u_4 - u_2 = u_1q^3 - u_1q = u_1q(q^2 - 1)$

$u_5 - u_3 = u_1q^4 - u_1q^2 = u_1q^2(q^2 - 1)$

Nên $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2 - 1) = 72 & (1) \\ u_1q^2(q^2 - 1) = 144 & (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2): $72q = 144 \Rightarrow q = 2$

Từ (1) $u_1.2(2^2 - 1) = 72 \Rightarrow u_1 = \frac{72}{6} = 12$

Vậy $u_1 = 12$; $q = 2$.

c) Do $u_2 + u_5 - u_4 = 10$

Nhân hai vế với q, ta có:

$$u_2q + u_5.q - u_4.q = 10q \Rightarrow u_3 + u_6 - u_5 = 10q$$
$$\Rightarrow 20 = 10q \Rightarrow q = 2$$

Từ $u_2 + u_5 - u_4 = 10 \Rightarrow u_1q + u_1q^4 - u_1.q^3 = 10$

$$\Rightarrow u_1(q + q^4 - q^3) = 10$$
$$\Rightarrow u_1(2 + 16 - 8) = 10$$
$$\Rightarrow u_1 = \frac{10}{10} = 1$$

Vậy $u_1 = 1$; $q = 2$.

10. Tứ giác ABCD có số đo độ các góc lập thành một cấp số nhân theo thứ tự A, B, C, D. Biết rằng góc C gấp bốn lần góc A. Tính các góc của tứ giác.

Giải

Ta có cấp số nhân A, B, C, D, biết $A + B + C + D = 360^0$ và $C = 4A$.

Sử dụng tính chất các số hạng của cấp số nhân, ta có.

$$B^2 = A.C = A.4A = 4A^2 \Rightarrow B = 2A$$
$$C^2 = B.D \Rightarrow D = \frac{C^2}{B} = \frac{16A^2}{2A} = 8A$$

Với $A + B + C + D = 360^0$

$$\Rightarrow A + 2A + 4A + 8A = 360^0$$
$$\Rightarrow 15A = 360^0$$
$$\Rightarrow A = 24^0$$

Vậy $A = 24^0$, $B = 48^0$, $C = 96^0$ và $D = 192^0$.

11. Biết rằng ba số x, y, z lập thành một cấp số nhân ($x \neq 0$) và ba số x, 2y, 3z lập thành một cấp số cộng. Tìm công bội của cấp số nhân.

Giải

x, y, z lập thành cấp số nhân, công bội q ($x \neq 0$) nên $y = xq$, $z = xq^2$.

Với ba số x, 2y, 3z lập thành cấp số cộng.

Nên $2y = \dfrac{x + 3z}{2}$ hay $x + 3z = 4y$

$$\Leftrightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Leftrightarrow 1 + 3q^2 = 4q \text{ (do } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy công bội của cấp số nhân là $q = 1$ hoặc $q = \dfrac{1}{3}$.

12. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích mặt đế tháp là 12 288m^2, tính diện tích mặt trên cùng.

Giải

Gọi diện tích mặt trên của tầng thứ n là $u_n(n = 1, 2, ...11)$.

Ta có (u_n) là một cấp số nhân $u_1 = 6144$, công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $u_{11} = u_1.q^{10} = 6144.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 6$

Vậy diện tích mặt trên cùng là 6m^2.

13. Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng nếu các số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng thì các số $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải

Với $a > 0, b > 0, c > 0$

Do a^2, b^2, c^2 lập thành cấp số cộng nên $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$.

Ta chứng minh $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ lập thành cấp số cộng thật vậy:

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \Leftrightarrow \frac{b+c-a-c}{(a+c)(b+c)} = \frac{a+c-a-b}{(a+b)(a+c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)}$$

$$\Leftrightarrow (b - a)(a + b) = (c - b)(b + c)$$

$$\Leftrightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \text{ (đẳng thức đúng)}$$

Vậy $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}$ lập thành một cấp số cộng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

14. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Hãy chọn phương án đúng:

a) Số hạng u_{n+1} bằng:

(A) $3^n + 1$; (B) $3^n + 3$; (C) $3^n.3$; (D) $3(n+1)$.

b) Số hạng u_{2n} bằng:

(A) 2.3^n; (B) 9^n; (C) $3^n + 3$; (D) $6n$.

c) Số hạng u_{n-1} bằng:

(A) $3^n - 1$; (B) $\frac{1}{3}.3^n$; (C) $3^n - 3$; (D) $3n - 1$.

d) Số hạng u_{2n-1} bằng:

(A) $3^2.3^n - 1$; (B) $3^n.3^{n-1}$; (C) $3^{2n} - 1$; (D) $3^{2(n-1)}$.

Giải

a) Chọn (C)

$u_{n+1} = 3^{n+1} = 3^n.3$

b) Chọn (B)

$u_{2n} = 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$

c) Chọn (B)

$$u_{n-1} = 3^{n-1} = \frac{3^n}{3}$$

d) Chọn (B)

$u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^{n+n-1} = 3^n.3^{n-1}$

15. Hãy cho biết dãy số (u_n) nào dưới đây là dãy số tăng, nếu biết công thức số hạng tổng quát u_n của nó là:

(A) $(-1)^{n+1}.\sin\frac{\pi}{n}$; (B) $(-1)^{2n}(5^n + 1)$; (C) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$; (D) $\frac{n}{n^2+1}$.

Giải

Chọn (B)

- Dãy số (A) bị loại vì các số hạng đan dấu.
- Dãy số (C) và (D) giảm.
- Dãy số (B).

$u_n = (-1)^{2n}(5^n + 1) = 5^n + 1$

$u_{n+1} - u_n = 5^{n+1} + 1 - (5^n - 1) = 5^n.5 - 5^n = 4.5^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{2n}(5^n + 1)$ tăng.

16. Cho cấp số cộng $-2, x, 6, y$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

(A) $x = -6, y = -2$;　　(B) $x = 1, y = 7$;

(C) $x = 2, y = 8$;　　(D) $x = 2, y = 10$.

Giải

Chọn (D).

Ta có $x = \dfrac{-2+6}{2} = 2$

$$x + y = 2.6 \Rightarrow 2 + y = 12 \Rightarrow y = 10.$$

17. Cho cấp số nhân $-4, x, -9$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

(A) $x = 36$;　　(B) $x = -6{,}5$;　　(C) $x = 6$;　　(D) $x = -36$.

Giải

Chọn (C).

$x^2 = (-4)(-9) = 36 \Rightarrow x = 6$ (chỉ chọn $x = 6$).

18. Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

(A) $\dfrac{u_{10} + u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$;　　(B) $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$;

(C) $u_{10}.u_{30} = u_{20}$;　　(D) $\dfrac{u_{10}.u_{30}}{2} = u_{20}$.

Giải

Chọn (B).

(A) $\dfrac{u_{10} + u_{20}}{2} = \dfrac{u_1 + 9d + u_1 + 19d}{2} = \dfrac{2u_1 + 28d}{2} = u_1 + 14d$

$u_5 + u_{10} = u_1 + 4d + u_1 + 9d = 2u_1 + 13d$

(B) $u_{90} + u_{210} = u_1 + 89d + u_1 + 209d = 2u_1 + 298d$

$2u_{150} = 2(u_1 + 149d) = 2u_1 + 298d$

Vậy $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$.

19. Trong các dãy số cho bởi các công thức truy hồi sau, hãy chọn dãy số là cấp số nhân:

(A) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$;　　(B) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$;　　(D) $7, 77, 777, \ldots, \underbrace{777\ldots7}_{n \text{ chữ số } 7}$.

Giải

Chọn (B)

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

Rõ ràng dãy (u_n) là cấp số nhân số hạng đầu -1, công bội là 3.

Chương IV.

GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

* Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là số a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Các giới hạn đặc biệt

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với $k \in N^*$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$)
- Nếu $u_n = C$ (hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} C = C$

Ghi chú: Viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ có thể viết tắt $\lim u_n = a$.

3. Các định lí về giới hạn

* Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$
- $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$)

* Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cho cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) là:

$$\boxed{S_n = \frac{u_1}{1-q}}$$

5. Giới hạn vô cực

* Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

* Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

6. Các giới hạn đặc biệt

- $\lim n^k = +\infty$ $(k \in N^*)$
- $\lim q^n = +\infty$ $(q > 1)$
- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ $(\forall n \in N^*)$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim (u_n v_n) = +\infty$.

BÀI TẬP

1. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian T = 24000 năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe con người (T được gọi là chu kì bán rã). Gọi (u_n) là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả của câu b, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, cho biết chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6}g.

Giải

a) Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại

Sau chu kì thứ n, ta có:

$$u_1 = \frac{1}{2};\ u_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2};\ u_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3};\ u_4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4};\ \ldots$$

Dự đoán $u_n = \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in N^*$, thật vậy:

- $u_1 = \frac{1}{2}$
- Giả sử $u_k = \frac{1}{2^k}$ với $k \geq 1$

Ta chứng minh $u_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}}$

Ta có $u_{k+1} = \frac{1}{2^k}.\frac{1}{2}$ (dãy số là cấp số nhân công bội $\frac{1}{2}$)

$$= \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Vậy $u_n = \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in N^*$.

b) Ta có $\lim u_n = \lim\frac{1}{2^n} = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (do $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$).

c) Ta có: $\frac{1}{10^6}$ (g) $= \frac{1}{10^6}.\frac{1}{10^3}$ (kg) $= \frac{1}{10^9}$(kg).

Vì $u_n \to 0$, nên $|u_n| = \frac{1}{2^n}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Do đó $|u_n| < \frac{1}{10^9}$ kể từ chu kì n_0 nào đó.

Cụ thể muốn $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^9}$, ta cần chọn n_0 sao cho $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{10^9}$ hay $2^{n_0} > 10^9$.

Chọn $n_0 = 36$ thì $2^{36} = (2^4)^9 = 16^9 > 10^9$.

Như vậy sau chu kì thứ 36, nghĩa là sau 36.24000 = 864000 năm thì không còn lo lắng về sự độc hại của khối lượng chất phóng xạ còn lại.

2. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$.

Giải

- Vì $\lim\frac{1}{n^3} = 0$ với mọi n, nên $\left|\frac{1}{n^3}\right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi (1)

- Do $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3} = \left|\frac{1}{n^3}\right|$ với mọi n (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n - 1|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim(u_n - 1) = 0$.

Do đó $\lim u_n = 1$

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{6n-1}{3n+2}$; b) $\lim\frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$; c) $\lim\frac{3^n+5.4^n}{4^n+2^n}$; d) $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$.

Giải

a) $$\lim\frac{6n-1}{3n+2} = \lim\frac{n\left(6-\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim\frac{6-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = 2$$

$$\left(\text{Vì } \lim\left(6-\frac{1}{n}\right) = 6 \text{ và } \lim\left(3+\frac{2}{n}\right) = 3\right)$$

b) $$\lim\frac{3n^2+n-5}{2n^2+1} = \lim\frac{n^2\left(3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)-\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\text{Vì } \lim\left(3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right) = 3 \text{ và } \lim\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2\right)$$

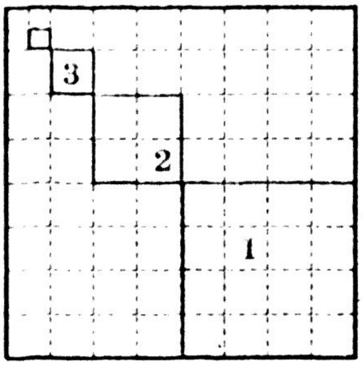
c) $$\lim\frac{3^n+5.4^n}{4^n+2^n} = \lim\frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+5\right]}{4^n\left[1+\left(\frac{2}{4}\right)^n\right]} = \lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+5}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 5$$

$$\left(\text{Vì } \lim\left[5+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 5 \text{ và } \lim\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1\right)$$

d) $$\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2} = \lim\frac{\sqrt{n^2\left(9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(4-\frac{2}{n}\right)} = \lim\frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{4-\frac{2}{n}} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\text{Do } \lim\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{9} = 3 \text{ và } \lim\left(4-\frac{2}{n}\right) = 4\right)$$

4. Để trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột Mickey quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1. Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3,..., n,... trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó (hình sau).



Giả sử rằng quy trình tô màu của Mickey có thể tiến ra vô hạn.

a) Gọi u_n là diện tích của hình vuông màu xám thứ n. Tính u_1, u_2, u_3 và u_n.

b) Tính $\lim S_n$ với $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

Giải

a) Gọi u_n là diện tích hình vuông được tô màu thứ n.

Ta có $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$, $u_3 = \frac{1}{64} = \frac{1}{4^3}$, ...

Do đó $u_n = \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (dễ dàng chứng minh bằng phương pháp qui nạp).

b) Có thể nhận thấy dãy số là cấp số nhân lùi vô hạn.

Số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{4}$, công bội là $q = \frac{1}{4}$.

$$\text{Vậy } \lim S_n = \lim(u_1 + u_2 + ... + u_n) = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

5. Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + ... + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + ...$

Giải

Tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + ... + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

Đây là tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn, số hạng đầu -1, công bội $-\frac{1}{10} < 1$.

$$\text{Ta có: } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-1}{1+\frac{1}{10}} = \frac{-1}{\frac{11}{10}} = -\frac{10}{11}$$

6. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 1,020202...$ (chu kì là 02). Hãy viết a dưới dạng một phân số.

Giải

Ta có: $a = 1,020202 \ldots$ (chu kì 02) $= 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{100^2} + \ldots + \frac{2}{100^n} + \ldots$

a là tổng của 1 và các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn, số hạng đầu là $\frac{2}{100}$, công bội $q = \frac{1}{100} < 1$.

Ta có: $a = 1 + \dfrac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \dfrac{\frac{2}{100}}{\frac{99}{100}} = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{100}$.

7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1)$

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2)$

c) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n)$

d) $\lim(\sqrt{n^2 - n} + n)$.

Giải

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1) = \lim n^3\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$

$\left(\text{Vì } \lim n^3 = +\infty,\ \lim\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 1\right)$

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2) = \lim n^2\left(-1 + \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = -\infty$

(Vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim\left(-1 + \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = -1$)

c) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n) = \lim\dfrac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \lim\dfrac{-n}{\sqrt{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)} + n}$

$$= \lim\frac{-n}{n\left[\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right]} = \lim\frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

(do $\lim\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right) = 2$)

d) $\lim(\sqrt{n^2 - n} + n) = \lim\left(\sqrt{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)} + n\right) = \lim n\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right) = +\infty$

(Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right) = 2$)

8. Cho hai dãy (u_n) và (v_n). Biết $\lim u_n = 3$, $\lim v_n = +\infty$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$; b) $\lim\dfrac{v_n + 2}{v_n^2 - 1}$.

Giải

Biết $\lim u_n = 3$, $\lim v_n = +\infty$.

a) $\lim\dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$

Ta có: $\lim(3u_n - 1) = \lim 3u_n - \lim(-1) = 9 - 1 = 8.$

$\lim(u_n + 1) = \lim u_n + \lim 1 = 3 + 1 = 4$

Vậy: $\lim\dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{8}{4} = 2$

b) $\lim\dfrac{v_n + 2}{v_n^2 - 1} = \lim\dfrac{\left(1 + \dfrac{2}{v_n}\right)}{v_n - \dfrac{1}{v_n}}$

Ta có: $\lim\left(1 + \dfrac{2}{v_n}\right) = \lim 1 + \lim\dfrac{2}{v_n} = 1 + 0 = 1$

$\lim\left(v_n - \dfrac{1}{v_n}\right) = \lim v_n - \lim\dfrac{1}{\sqrt{n}} = +\infty - 0 = +\infty$

Vậy $\lim\dfrac{v_n + 2}{v_n^2 - 1} = 0$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

* Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L (khi x dần tới x_0, nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c là hằng số)

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

a) Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, ta có:

- $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x).g(x) = L.M$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)

b) Nếu $f(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

3. Giới hạn một bên

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là ***giới hạn bên phải*** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$, nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là ***giới hạn bên trái*** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$, nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$ ta có $f(x_n) = L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$, nếu với dãy số (x_n) bất kì và $x_n \to +\infty$ ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$, nếu với dãy số (x_n) bất kì và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Chú ý: c, k là hằng số, $k \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to \pm\infty} c = c\ ; \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

5. Giới hạn vô cực của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$, nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty}(-f(x)) = -\infty$

Một số giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn.

BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x + 1}{3x - 2}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - 5x^2}{x^2 + 3}$.

Giải

Sử dụng định nghĩa

a) Hàm số $f(x) = \dfrac{x + 1}{3x - 2}$ xác định trên $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$

và $x = 4 \in \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n \in \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$; $x_n \neq 4$ và $x_n \to 4$ khi $n \to +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n + 1}{3x_n - 2} = \dfrac{4 + 1}{12 - 2} = \dfrac{1}{2}$

Vậy $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x + 1}{3x - 2} = \dfrac{1}{2}$

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{2 - 5x^2}{x^2 + 3}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

$$\text{Ta có } \lim f(x_n) = \lim \frac{2 - 5x_n^2}{x_n^2 + 3} = \lim \frac{\dfrac{2}{x_n^2} - 5}{1 + \dfrac{3}{x_n^2}} = -5.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - 5x^2}{x^2 + 3} = -5$

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ và các dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$; (v_n) với $v_n = -\frac{1}{n}$. Tính $\lim u_n, \lim v_n, \lim f(u_n)$ và $\lim f(v_n)$. Từ đó có kết luận gì về giới hạn của hàm số đã cho khi $x \to 0$?

Giải

Ta có $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$

$$\lim v_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} > 0$ và $v_n = -\frac{1}{n} < 0$

nên $f(u_n) = \sqrt{\frac{1}{n}} + 1$ và $f(v_n) = -\frac{2}{n}$

Do đó $\lim f(u_n) = \lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + 1\right) = 1$

$$\lim f(v_n) = \lim\left(-\frac{2}{n}\right) = 0$$

Vì $u_n \to 0$ và $v_n \to 0$, nhưng $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$, nên hàm số $y = f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$; c) $\lim\limits_{x \to 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x}$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{17}{x^2 + 1}$; f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to -3}(x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to -3}(x + 1)} = \frac{\lim\limits_{x \to -3} x^2 - \lim\limits_{x \to -3} 1}{\lim\limits_{x \to -3} x + \lim\limits_{x \to -3} 1} = \frac{9 - 1}{-3 + 1} = \frac{8}{-2} = -4$

b) Với $x \neq -2$ ta có $\frac{4 - x^2}{x + 2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{x + 2} = 2 - x$

Vậy $\lim\limits_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2}(2 - x) = 4$

c) Với $x \neq 6$, ta có:

$$\frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6} = \frac{(\sqrt{x + 3} - 3)(\sqrt{x + 3} + 3)}{(x - 6)(\sqrt{x + 3} + 3)} = \frac{x - 6}{(x - 6)(\sqrt{x + 3} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x + 3} + 3}$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6} = \lim\limits_{x \to 6} \frac{1}{\sqrt{x + 3} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-6}{4-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{6}{x}\right)}{\left(-1+\dfrac{4}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{6}{x}}{-1+\dfrac{4}{x}}=-2$

e) Do $\lim\limits_{x\to+\infty}17=17$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{17}{x^2+1}=0$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{1+\dfrac{3}{x}}$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=1$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}=-\infty$

4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}$.

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)=1>0$

$\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2=0$ và $(x-2)^2>0$ với mọi $x\neq2$

Vậy $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}=+\infty$

b) Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-7)=-5<0$

$\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ và $x-1<0$ với mọi $x<1$

Vậy $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}=+\infty$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-7)=-5<0$

và $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ và $x-1>0$ với mọi $x>1$

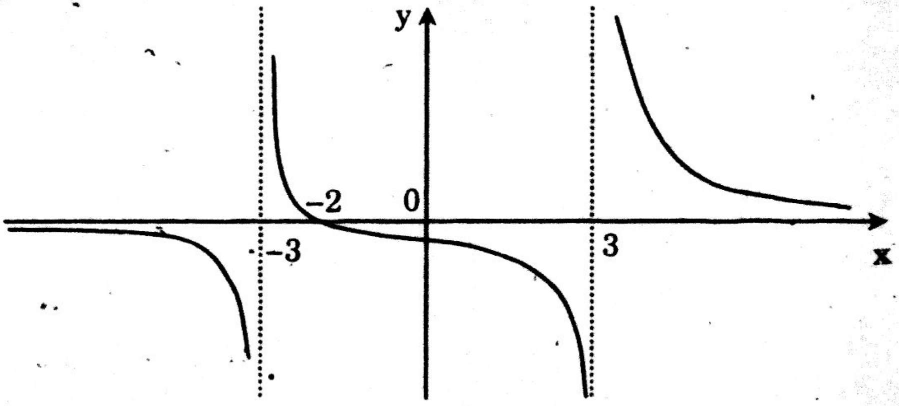
Vậy $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}=-\infty$

5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-9}$, có đồ thị như hình vẽ.

a) Quan sát đồ thị và nêu nhận xét về hàm số đã cho khi $x\to-\infty$, $x\to3^-$ và $x\to-3^+$.

b) Kiểm tra các nhận xét trên bằng cách tính các giới hạn sau:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-3; 3)$.
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-3; 3)$.



Giải

Hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 9}$ xác định trên $(-\infty; 3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

a) Quan sát đồ thị ta thấy:

- $f(x) \to 0$ khi $x \to -\infty$
- $f(x) \to -\infty$ khi $x \to 3^-$
- $f(x) \to +\infty$ khi $x \to -3^+$

b) Kiểm tra

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ với f(x) xét trên khoảng $(-\infty; -3)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+2)}{x^2 - 9} = \dfrac{x\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{9}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{9}{x^2}\right)}$

Do $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(1 - \dfrac{9}{x^2}\right)\right] = -\infty$

Vậy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-3; 3)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 3^-} (x + 2) = 5$

$\lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 9) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x - 3)(x + 3) = 0.6 = 0$

và $x - 3 < 0$ với mọi $x < 3$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-3; 3)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -3^+}(x+2) = -1$

$\lim\limits_{x \to -3^+}(x^2 - 9) = \lim\limits_{x \to -3^+}(x-3)(x+3) = -6.0 = 0$

và $-6 < 0$ và $x + 3 > 0$ với mọi $x > -3$

Do đó $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

6. Tính:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^4 - x^2 + x - 1\right)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-2x^3 + 3x^2 - 5\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{x^2 - 2x + 5}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^4 - x^2 + x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4\left(1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right) = +\infty$

$\left(\text{Vì } \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right) = 1\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty}(-2x^3 + 3x^2 - 5) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^3}\right) = +\infty$

$\left(\text{Vì } \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim\limits_{x \to -\infty}\left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^3}\right) = -2\right)$

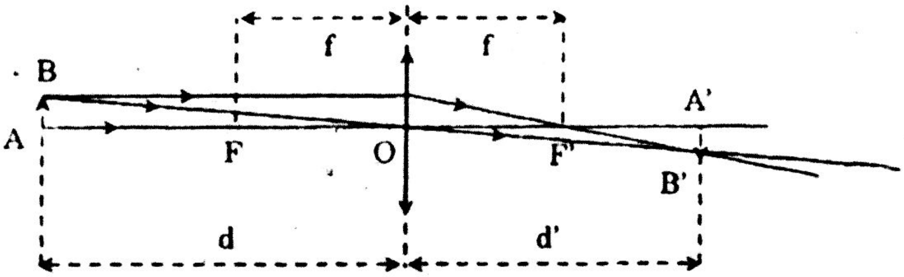
c) $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{x^2 - 2x + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty}|x|\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}} = +\infty$

$\left(\text{Vì } \lim\limits_{x \to -\infty}|x| = +\infty \text{ và } \lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}} = 1\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} + x}{x\left(-2 + \dfrac{5}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} + 1\right)}{x\left(-2 + \dfrac{5}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} + 1\right)}{-2 + \dfrac{5}{x}} = \dfrac{2}{-2} = -1 \text{(với } x \to +\infty \Rightarrow x > 0)$

7. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d′ lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh A′B′ của nó tới quang tâm O của thấu kính (hình sau). Công thức thấu kính là $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'} = \dfrac{1}{f}$.



a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

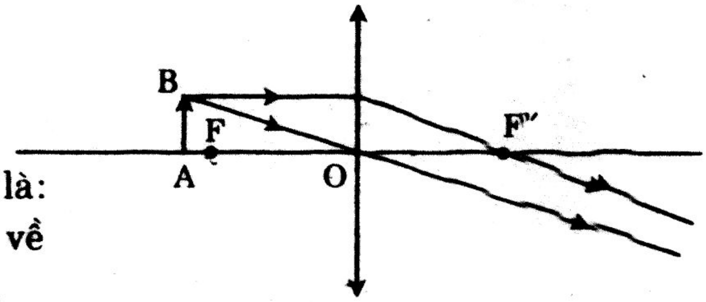
b) Tìm $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)$, $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$, và $\lim\limits_{d\to +\infty}\varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Giải

a) Từ hệ thức $\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{d'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{d}=\frac{d-f}{fd}$

Vậy $d' = \varphi(d) = \frac{fd}{d-f}$

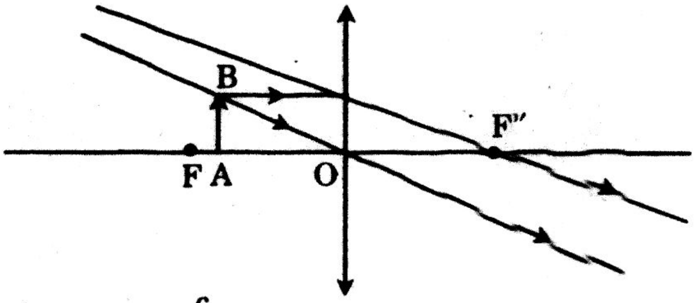
b) • $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d) = \lim\limits_{d\to f^+}\frac{fd}{d-f} = +\infty$



Kết quả này có nghĩa là: Nếu vật thật AB tiến dần về tiêu điểm F sao cho d luôn lớn hơn f thì ảnh của nó dần tới dương vô cực.

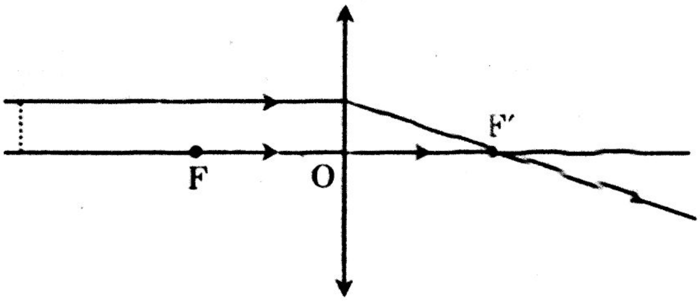
• $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d) = \lim\limits_{d\to f^-}\frac{fd}{d-f} = -\infty$

Kết quả này có nghĩa là: Nếu vật thật AB tiến dần về tiêu điểm F sao cho d luôn nhỏ hơn f thì ảnh của nó dần tới âm vô cực.



• $\lim\limits_{d\to +\infty} = \lim\limits_{d\to +\infty}\frac{fd}{d-f} = \lim\limits_{d\to +\infty}\frac{fd}{d\left(1-\frac{f}{d}\right)} = \lim\limits_{d\to +\infty}\frac{f}{1-\frac{f}{d}} = f$

Kết quả này có nghĩa là: Nếu vật thật AB ở xa vô cực so với thấu kính thì ảnh của nó ở ngay trên tiêu diện ảnh (Mặt phẳng qua tiêu điểm ảnh F′ và vuông góc với trục chính).



§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số y = f(x) được gọi là ***liên tục tại x₀*** nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

* Hàm số y = f(x) được gọi là **liên tục trên khoảng (a; b)** nếu hàm số liên tục tại x_0, $\forall x_0 \in (a; b)$.

* Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a; b] nếu nó liên tục trên khoảng (a; b) và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

3. Các định lí cơ bản

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- Giả sử các hàm số y = f(x) và y = g(x) liên tục tại x_0 thì

  + Hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) − g(x), y = f(x).g(x) liên tục tại x_0.

  + Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 (nếu $g(x) \neq 0$)
- Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và f(a).f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho f(c) = 0.

BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số: $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tại $x_0 = 3$.

Giải

* Hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^3 + 2x - 1) = 32$

$f(3) = 3^3 + 2.3 - 1 = 32$

Do đó $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Vậy hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$ liên tục tại $x_0 = 3$.

2. a) Xét tính liên tục của hàm số y = g(x) tại $x_0 = 2$, biết: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

b) Trong biểu thức xác định g(x) ở trên, cần thay số 5 bởi số nào để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Giải

a) Tập xác định của hàm số $\mathbb{R}$.

- Nếu $x \neq 2$ thì $g(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ có tập xác định $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Đây là hàm phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên các khoảng xác định $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- Nếu x = 2 ta có g(2) = 5

và $$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12$$

Vì $\lim_{x \to 2} g(x) \neq g(x)$ nên hàm số g(x) không liên tục tại x = 2.

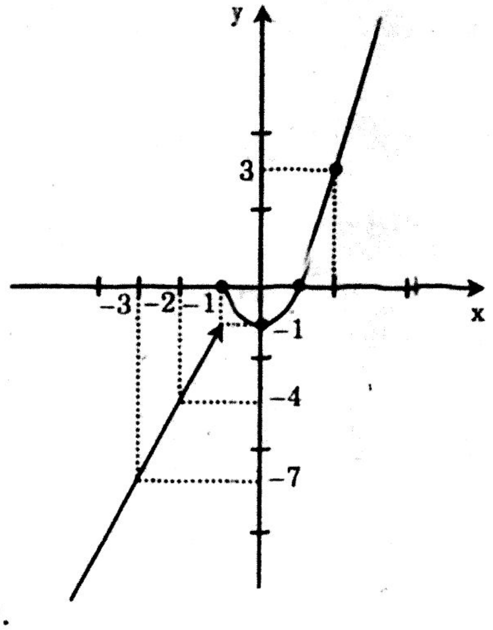
b) Trong biểu thức xác định ở trên cần thay số 5 bằng số 12 để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 \text{ nếu } x < -1 \\ x^2 - 1 \text{ nếu } x \geq -1 \end{cases}$

a) Vẽ đồ thị của hàm số y = f(x). Từ đó nêu nhận xét về tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

b) Khẳng định nhận xét trên bằng một chứng minh.

Giải



a) Vẽ đồ thị hàm số y = f(x).

Tập xác định của hàm số $\mathbb{R}$.

* Đồ thị f(x) = 3x + 2 (với x < −1) là phần đường thẳng qua các điểm (−2; −4)(−3; −7).

* Đồ thị $f(x) = x^2 - 1$ (với $x \geq -1$) là parabol.

- Đỉnh (0; −1).
- Bề lõm hướng lên trên.
- Cắt trục hoành tại (−1; 0) và (1; 0).

Căn cứ vào đồ thị ta thấy hàm số không liên tục tại điểm x = −1, liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

b) Chứng minh:

- Nếu $x \geq -1$ thì $f(x) = x^2 - 1$.

  Đây là hàm đa thức có tập xác định $[-1; +\infty)$ và hàm số này liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

- Nếu $x < -1$ thì $f(x) = 3x + 2$.

  Đây là hàm đa thức có tập xác định $(-\infty; -1)$ nên hàm số này liên tục trên khoảng $(-\infty; -1)$.

  Mặt khác $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1$ nên $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

  Vậy hàm số không liên tục tại $x = 1$.

4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 6}$ và $g(x) = \tan x + \sin x$. Với mỗi hàm số, hãy xác định các khoảng trên đó hàm số liên tục.

Giải

Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 6}$.

- Tập xác định của hàm số $\mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.
- Đây là hàm phân thức hữu tỉ nên hàm số này liên tục trên mỗi khoảng xác định $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số $g(x) = \tan x + \sin x$.

- Tập xác định hàm số là $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Đây là hàm lượng giác nên hàm số này liên tục trên mỗi khoảng xác định $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Ý kiến sau đúng hay sai?

"Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0, thì $y = f(x) + g(x)$ là một hàm số không liên tục tại x_0".

Giải

Ý kiến đúng.

Giả sử hàm số $y = f(x) + g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0.

Đặt $h(x) = f(x) + g(x)$ khi đó $g(x) = h(x) - f(x)$.

Do $f(x)$ liên tục tại x_0 và $h(x)$ liên tục tại (x_0).

Suy ra g(x) liên tục tại x_0 (trái với giả thiết).

Vậy hàm số $y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0.

6. Chứng minh rằng phương trình:

a) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm;

b) $\cos x = x$ có nghiệm.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x + 1 = 0$

- Tập xác định của hàm số $\mathbb{R}$.
- Hàm số f(x) liên tục $\mathbb{R}$ nên hàm số f(x) liên tục trên [0; 1].

Ta có $f(0).f(1) = 1.(-3) < 0$.

Do đó tồn tại một giá trị $x_1 \in (0; 1)$ để $f(x_1) = 0$.

Mặt khác: f(x) liên tục trên đoạn [1; 2] ta có: $f(1).f(2) = -3.5 < 0$.

Do đó tồn tại một giá trị $x_2 \in (1; 2)$ để $f(x_2) = 0$.

Vậy phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm x_1, x_2.

b) Xét hàm số $f(x) = \cos x - x$.

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- Hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ (do các hàm số cosx và x liên tục trên $\mathbb{R}$), do đó hàm số f(x) liên tục trên đoạn [0; 1].

Ta có $f(0).f(1) = 1.(\cos 1 - 1) < 0$ (do $\cos 1 < 1$).

Vậy tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_0) = 0$, nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm hay phương trình $\cos x = x$ có nghiệm.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

2. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Biết $|u_n - 2| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số (u_n)?

Giải

$|u_n - 2| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$

Do $\lim v_n = 0$, nên $|v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó.

Ta có: $|u_n - 2| \le v_n \le |v_n|$, do đó $|u_n - 2|$ nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó.

Như vậy $\lim(u_n - 2) = 0$ hay $\lim u_n = \lim 2$.

Vậy $\lim u_n = 2$.

3. Tên của một bạn học sinh được mã hóa bởi số 1530. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, H, N, O với:

$A = \lim\dfrac{3n-1}{n+2}$; $H = \lim\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$;

$N = \lim\dfrac{\sqrt{n}-2}{3n+7}$; $O = \lim\dfrac{3^n - 5.4^n}{1-4^n}$.

Hãy cho biết tên của bạn học sinh này, bằng cách thay các chữ số trên bằng các chữ kí hiệu biểu thức tương ứng.

Giải

$$A = \lim\frac{3n-1}{n+2} = \lim\frac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim\frac{\left(3-\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}} = 3$$

$$H = \lim(\sqrt{n^2+2n} - n) = \lim\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$= \lim\frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}+n} = \lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$N = \lim\frac{\sqrt{n}-2}{3n+7} = \lim\frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(3+\frac{7}{n}\right)} = \lim\frac{\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(3+\frac{7}{n}\right)} = 0$$

$$\left(\text{Vì } \lim\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 \text{ và } \lim\sqrt{n}\left(3+\frac{7}{n}\right) = +\infty\right)$$

$$O = \lim\frac{3^n - 5.4^n}{1-4^n} = \lim\frac{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 5\right)}{4^n\left(-1+\frac{1}{4^n}\right)} = \lim\frac{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 5\right)}{\left(-1+\frac{1}{4^n}\right)} = 5$$

$$\left(\text{Vì } \lim\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 5\right) = -5 \text{ và } \lim\left(-1+\frac{1}{4^n}\right) = -1\right)$$

Vậy tên của bạn học sinh là: HOAN

4. a) Có nhận xét gì về công bội của cấp số nhân lùi vô hạn?

b) Cho ví dụ về một cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là một số âm và một cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là số dương và tính tổng của mỗi cấp số nhân đó.

Giải

a) Công bội của cấp số nhân lùi vô hạn là q với $|q| < 1$ nghĩa là $-1 < q < 1$.

b) * Ví dụ về cấp số nhân có công bội là số âm.

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ số hạng đầu 1, công bội $-\frac{1}{2}$.

Tổng của cấp số nhân là: $S_n = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

* Ví dụ về cấp số nhân có công bội là số dương.

$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ có số hạng đầu 2, công bội $\frac{1}{2}$.

Tổng của cấp số nhân là: $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$

5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x^2+x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$; c) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2x-5}{x-4}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-x^3+x^2-2x+1\right)$; e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+3}{3x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}$.

Giải

a) $$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2+x+4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+4)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 3}{\lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 4} = \frac{2+3}{4+2+4} = \frac{1}{2}$$

b) Ta có: $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x} = \dfrac{(x+2)(x+3)}{x(x+3)} = \dfrac{x+2}{x}$ (với $x \neq -3$)

Vậy $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$

c) Do $\lim\limits_{x\to4^-}(2x-5)=3$

$\lim\limits_{x\to4^-}(x-4)=0$ và $x-4<0$ với mọi $x<4$

Nên $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{2x-5}{x-4}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2-2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$

(do $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=-1$)

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{1}{3}$

f) Ta có $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}=\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}-x}{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-x}{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}$

$$=\frac{-x\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+1\right)}{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}\ \text{(với } x<0\text{)}$$

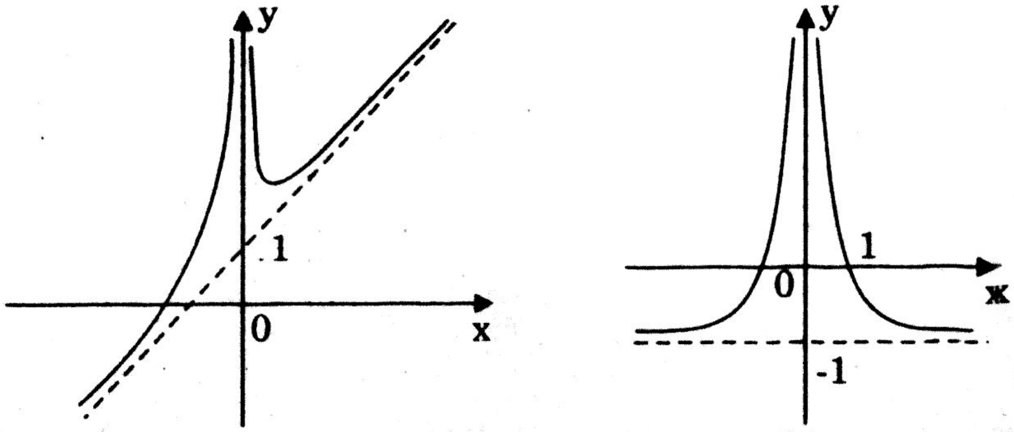
$$=\frac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+1}{3-\dfrac{1}{x}}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+1\right)}{3-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-1+1}{3}=\dfrac{0}{3}=0.$

6. Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}$ và $g(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}$

a) Tìm $\lim\limits_{x\to0}f(x)$; $\lim\limits_{x\to0}g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$;

b) Hai đường cong sau đây là đồ thị của hai hàm số đã cho. Từ kết quả (a), hãy xác định xem đường cong nào là đồ thị của mỗi hàm số đó.



a) b)

Giải

a) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$ và $g(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

- Tập xác định của f(x) là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Tập xác định của g(x) là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

* Do $\lim\limits_{x \to 0}(1 - x^2) = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ và $x^2 > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2}{x^2} = +\infty$$

* Do $\lim\limits_{x \to 0}(x^3 + x^2 + 1) = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ và $x^2 > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = +\infty$$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(-1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(-1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = -1$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2(x + 1 + \dfrac{1}{x^2})}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

b) Từ kết quả câu a)

Đồ thị (hình 60 a)) biểu diễn hàm số $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$ và đồ thị (hình 60 b)) biểu diễn hàm số $g(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2}$.

7. Xét tính liên tục trên $\mathbb{R}$ của hàm số $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x > 2 \\ 5 - x & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$.

Giải

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x > 2 \\ 5 - x & \text{nên } x \leq 2 \end{cases}$$

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- Nếu $x > 2$ thì $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ là hàm phân thức đại số xác định trên $(2; +\infty)$ nên $g(x)$ liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.
- Nếu $x \leq 2$ thì $g(x) = 5 - x$ là hàm đa thức xác định trên $(-\infty; 2]$ nên $g(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Mặt khác:

Ta có $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = x + 1$ với mọi $x \neq 2$

Nên $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2}(x + 1) = 3$

Và $g(2) = 5 - 2 = 3$

Do đó $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2)$

Suy ra hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

8. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng$(-2; 5)$.

Giải

Đặt $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, nên xác định trên $(-2; 5)$.

Do hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f(x)$ liên trục trên các đoạn $[0; 1]$, $[1; 2]$ và $[2; 3]$.

Mặt khác:

$f(0).f(1) = -2.1 = -2 < 0$ nên tồn tại $x_1 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_1) = 0$ (1)

$f(1).f(2) = 1.(-8) = -8 < 0$ nên tồn tại $x_2 \in (1; 2)$ sao cho $f(x_2) = 0$ (2)

$f(2).f(3) = (-8).13 < 0$ nên tồn tại $x_3 \in (2, 3)$ sao cho $f(x_3) = 0$ (3)

Từ (1), (2), (3) cho ta phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất là ba nghiệm x_1, x_2, x_3.

Vậy phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2$ có ít nhất là ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

9. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) Một dãy số có giới hạn thì luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm;

(B) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì $\lim u_n = +\infty$;

(C) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n - v_n) = 0$;

(D) Nếu $u_n = a^n$ và $-1 < a < 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Giải

Chọn (D).

(A) *Sai*, vì dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ có giới hạn là 0 nhưng không tăng không giảm.

(B) *Sai*, vì nếu chọn dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ là dãy số tăng nhưng $\lim u_n = 1$, thật vậy.

$$* \; u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} - \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n.2} - \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1 - 2^{n+1} + 2}{2^n.2} = \frac{1}{2^n.2} > 0, \forall n \in N^*$$

Do đó $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in N$.

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ là dãy số tăng.

$$* \lim \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim \frac{2^n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{2^n} = \lim\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

(C) *Sai*, vì nếu chọn (u_n) với $u_n = n^2$ và (u_n) với $v_n = n$

rõ ràng $\lim u_n = \lim n^2 = +\infty$ và $\lim v_n = \lim n = +\infty$

nhưng $\lim(u_n - v_n) = \lim(n^2 - n) = \lim n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$

10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2 + 1}$

Mệnh đề sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $\lim u_n = 0$; (B) $\lim u_n = \frac{1}{2}$; (C) $\lim u_n = 1$;

(D) Dãy (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

Giải

Chọn (B)

Do $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$ (cấp số cộng $u_1 = 1$ công sai $d = 1$)

$$\text{Nên } \lim u_n = \lim \frac{\dfrac{n^2+n}{2}}{n^2+1} = \lim \frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1+\dfrac{1}{n}}{2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

11. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{2}\right)^n$.

(A) $\lim u_n = \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{2}\right)^n + \ldots = \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$;

(B) $\lim u_n = -\infty$;

(C) $\lim u_n = +\infty$;

(D) Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

Giải

Chọn (C)

$u_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \ldots (\sqrt{2})^n$ (cấp số nhân $u_1 = \sqrt{2}$, công bội $q = \sqrt{2}$)

$$= \sqrt{2}\ \frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}}$$

Ta có: $\lim \sqrt{2}\,(1 - (\sqrt{2})^n = -\infty$

Và $\lim(1 - \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} < 0$

Vậy $\lim u_n = +\infty$

12. Chọn phương án đúng:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x-1}{x-1}$ bằng:

(A) -1 (B) $-\infty$; (C) -3; (D) $+\infty$.

Giải

Chọn (D)

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$ và $x - 1 < 0$ với mọi $x < 1$

và $\lim\limits_{x \to 1}(-3x-1) = 4 < 0$

Do đó $\lim \dfrac{-3x-1}{x-1} = +\infty$

13. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ bằng:

(A) $+\infty$; (B) 1; (C) $-\infty$; (D) -1.

Giải

Chọn (A)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x^2}-1\right) = +\infty$$

(Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right) = -1$)

14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x \neq 3 \\ m & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$

Để hàm số f(x) liên tại $x = 3$ thì phải chọn m bằng bao nhiêu?

(A) 4; (B) -1; (C) 1; (D) -4.

Giải

Chọn (D)

Hàm số f(x) xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$

Ta có: $\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \dfrac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2(\sqrt{x+1}+2)} = \dfrac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$= -(\sqrt{x+1}+2)$, với mọi $x \neq 3$

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3} -(\sqrt{x+1}+2) = -4$ và $f(3) = m$

Vậy để hàm số f(x) liên tục tại $x = 3$ ta phải có

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = f(3)$ nghĩa là $m = -4$.

15. Cho phương trình $-4x^3 + 4x - 1 = 0$. (1) mệnh đề nào sau dây là mệnh đề sai?

(A) Hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

(B) Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$

(C) Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$

(D) Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \dfrac{1}{2}\right)$

Giải

Chọn (B)

Đặt $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$

(A) Đúng:

Hàm số f(x) là hàm đa thức xác định trên $\mathbb{R}$ nên f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

(C) Đúng:

Hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[-2; 0]$ mà $f(-2).f(0) = 23.(-1) < 0$, nên tồn tại $x_0 \in (-2; 0)$ để $f(x_0) = 0$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ hay $-4x^3 + 4x - 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$

(D) Đúng:

Hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ mà $f(-3).f(0) = 99.(-1) < 0$, nên tồn tại $x_1 \in (-3; 0)$ để $f(x_1) = 0$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ hay $-4x^3 + 4x - 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-3; 0)$

Mặt khác: $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) = -1.\frac{1}{2} \leq 0$, nên tồn tại $x_2 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ để $f(x_2) = 0$

Do đó phương trình $-4x^3 + 4x - 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy phương trình $-4x^3 + 4x - 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy (B) sai.

Chương V.

ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Đạo hàm tại một điểm

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn).

  $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn này được gọi là ***đạo hàm của hàm số*** $y = f(x)$ ***tại*** x_0. Kí hiệu $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

  Ta ghi: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- **Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa.**

  Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0:

  Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0.

  Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

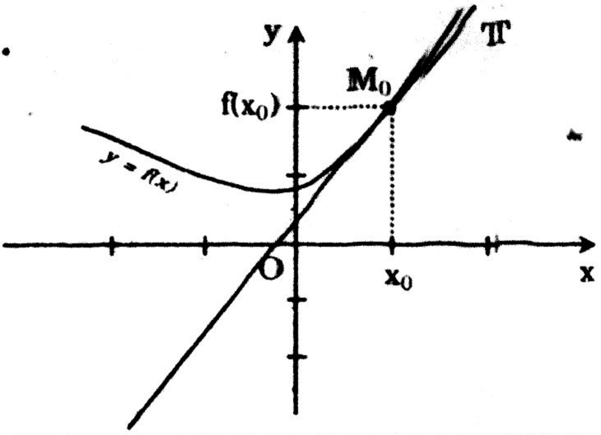
  Bước 2: Lập $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

  Bước 3: Tìm $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại $x = x_0$.

Ý nghĩa hình học của đạo hàm.

- Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ (có đồ thị (C) trong mặt phẳng tọa độ Oxy) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.



- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại $M_0(x_0, f(x_0))$ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (trong đó $y_0 = f(x_0)$)

2. Đạo hàm trên một khoảng

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại x_0; $\forall x_0 \in (a; b)$.

BÀI TẬP

1. Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^3$ biết rằng:

a) $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$; b) $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$.

Giải

$f(x) = x^3$

a) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2) - f(1) = 2^3 - 1^3 = 7$

b) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 - 0,1) - f(1) = 0,9^3 - 1^3 = -0,271$

2. Tính Δy và $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số sau theo x và Δx:

a) $y = 2x - 5$; b) $y = x^2 - 1$; c) $y = 2x^3$ d) $y = \dfrac{1}{x}$.

Giải

a) $y = 2x - 5$

- $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$

$$= 2(x + \Delta x) - 5 - (2x - 5)$$

$$= 2x + 2\Delta x - 5 - 2x + 5$$

$$= 2\Delta x$$

- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$

b) $y = x^2 - 1$

- $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$

$$= (x + \Delta x)^2 - 1 - (x^2 - 1)$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - x^2 + 1$$

$$= (\Delta x)^2 + 2x\Delta x$$

- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x.$

c) $y = 2x^3$

- $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3$
$$= 2(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 2x^3$$
$$= 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x^3$$
$$= 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + (\Delta x)^2$.

d) $y = \dfrac{1}{x}$

- $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$
$$= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

3. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$; b) $y = \dfrac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$; c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 0$.

Giải

a) $y = x^2 + x$. tính $y'(1)$

Ta có: $\Delta y = y(1 + \Delta x) - y(1)$
$$= (1 + \Delta x)^2 + 1 + \Delta x - (1 + 1)$$
$$= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 + \Delta x - 2$$
$$= (\Delta x)^2 + 3\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 3$$
$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 3) = 3.$$

Vậy $y'(1) = 3$

b) $y = \dfrac{1}{x}$. Tính $y'(2)$

Ta có: $\Delta y = y(2 + \Delta x) - y(2)$
$$= \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{2 - 2 - \Delta x}{2(2 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2(2 + \Delta x)}$$
$$y'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{2(2 + \Delta x)}\right) = -\frac{1}{4}$$

Vậy $y'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Tính $y'(0)$

Ta có: $\Delta y = y(0 + \Delta x) - y(0)$

$$= \frac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} - \frac{1}{-1} = \frac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} + 1 = \frac{\Delta x + 1 + \Delta x - 1}{\Delta x - 1} = \frac{2\Delta x}{\Delta x - 1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x - 1}$$

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x - 1} = -2$$

Vậy $y'(0) = -2$

4. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nhưng có đạo hàm tại $x = 2$.

Giải

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hàm số f(x) xác định trên $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x)^2 = 0$

Do đó hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Mặt khác: $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2)$

$$= (2 + \Delta x - 1)^2 - (2-1)^2 = (1 + \Delta x)^2 - 1$$

$$= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2$$

Vậy $f'(2) = 2$ hay hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$

a) Tại điểm $(-1; -1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2;

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Giải

$y = x^3$

$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3$

$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2.\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$

$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) $y = x^3$.

a) Tại $(-1; -1)$

Ta có: $y'(-1) = 3(-1)^2 = 3$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại $(-1; -1)$ là:

$$y + 1 = 3(x + 1) \text{ hay } y = 3x + 2$$

b) Tại điểm có hoành độ là 2

- $x = 2 \Rightarrow y = (2)^3 = 8$
- $y'(2) = 3.2^2 = 12$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $(2; 8)$ là:

$$y - 8 = 12(x - 2) \text{ hay } y = 12x - 16$$

c) Hệ số góc tại $M_0(x_0; y_0)$ của đồ thị $y = x^3$

$y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

- $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$
- $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $(1; 1)$ là:

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ hay } y = 3x - 2$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $(-1; -1)$ là:

$$y = 3x + 2 \text{ (câu a)}$$

Vậy ta có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) có hệ số góc là 3:

$$y = 3x - 2 \text{ và } y = 3x + 2.$$

6. Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \dfrac{1}{x}$.

a) Tại điểm $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng -1;

c) Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$.

Giải

$$y = \frac{1}{x}$$

Ta có: $\Delta y = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \dfrac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}$$

Do đó $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{x^2 + x\Delta x} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (H) $y = \dfrac{1}{x}$

a) Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

Ta có: $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{\frac{1}{1}} = -4$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (H) tại $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ là:

$$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ hay } y = -4x + 4.$$

b) Tại điểm có hoành độ –1

- $x = -1 \Rightarrow y = -1$
- $y'(-1) = -\dfrac{1}{(-1)^2} = -1$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (H) **tại điểm** có hoành độ –1 là $y + 1 = -1(x + 1)$ hay $y = -x - 2$.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với (H) **tại** $M_0(x_0; y_0)$ **là**

$$y'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \dfrac{1}{2}$
- $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -\dfrac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (H) tại $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ là:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \text{ hay } y = -\frac{1}{4}x + 1$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (H) tại $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ là:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x + 2) \text{ hay } y = -\frac{1}{4}x - 1$$

Vậy ta có hai tiếp tuyến với đồ thị (H) có hệ số góc là $\frac{1}{4}$ là:

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \text{ và } y = -\frac{1}{4}x - 1.$$

7. Một vật rơi tự do theo phương trình $S = \frac{1}{2}gt^2$. **Trong đó** $g \approx 9,8\,m/s^2$ **là gia** tốc trọng trường.

a) Tìm vận tốc trung bình của chuyển **động trong khoảng thời gian** từ t (t = 5s) đến t + Δt, trong các trường **hợp** Δt = 0,1 **s**; Δt = 0,05 **s**; Δt = 0,001 s.

b) **Tìm vận tốc** tức thời của chuyển **động tại thời điểm t = 5 s.**

Giải

a) $S = \frac{1}{2}gt^2 \approx 4,9t^2$ ($g \approx 9,8$ m/s^2)

Vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t(t = **5s) đến** t + Δt là:

$$S_{TB} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{4,9(t + \Delta t)^2 - 4,9t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{4,9[2t.\Delta t + (\Delta t)^2]}{\Delta t}$$

$$= 9,8t + 4,9.\Delta t$$

$$= 49 + 4,9.\Delta t \text{ (với } t = 5).$$

- Δt ≈ 0,1 s. Vận tốc trung bình là: 49 + 4,9.0,1 ≈ 49,49 m/s.
- Δt ≈ 0,05 s. Vận tốc trung bình là: 49 + 4,9.0,05 ≈ 49,245 m/s.
- Δt ≈ 0,001 s. Vận tốc trung bình là: 49 + 4,9.0,001 ≈ 49,0049 m/s.

b) Vận tốc tức thời tại thời điểm t = 5 s là:

$$\lim_{\Delta t \to 0} S_{TB} = \lim_{\Delta t \to 0} (49 + 4,9.\Delta t) = 49 \text{ (m/s)}.$$

§2. QUI TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

NỘI DUNG CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của một số hàm số

- Nếu $y = x^n$ thì $y' = nx^{n-1}$
- Nếu $y = c$ (hằng số) thì $y' = 0$
- Nếu $y = x$ thì $y' = 1$
- Nếu $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ thì $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại x thuộc khoảng xác định, ta có:

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u - v)' = u' - v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$

Hệ quả: • $(ku)' = ku'$ (k là hằng số)

• $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

3. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u.u'_x$

BÀI TẬP

1. Bằng định nghĩa, tìm đạo hàm của hàm số:

a) $y = 7 + x - x^2$ **tại** $x_0 = 1$; **b)** $y = x^3 - 2x + 1$ **tại** $x_0 = 2$.

Giải

Tìm bằng định nghĩa

a) $y = 7 + x - x^2$. Tính $y'(1)$

Ta có: $\Delta y = 7 + (1 + \Delta x) - (1 + \Delta x)^2 - (7 + 1 - 1^2)$

$$= 7 + 1 + \Delta x - 1 - 2\Delta x - (\Delta x)^2 - 7 - 1 + 1$$

$$= -\Delta x - (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 - \Delta x$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1 - \Delta x) = -1$$

Vậy $y'(1) = -1$.

b) $y = x^3 - 2x + 1$. Tính $y'(2)$

Ta có: $\Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 2(2 + \Delta x) + 1 - (2^3 - 2.2 + 1)$

$$= 2^3 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 4 - 2\Delta x + 1 - 5$$

$$= 10\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$y'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (10 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 = 10$$

Vậy $y'(2) = 10$.

2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$;

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5..x^4$;

c) $y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1$;

d) $y = 3x^5\left(8 - 3x^2\right)$..

Giải

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

$y' = (x^5 - 4x^3 + 2x - 3)' = (x^5)' - (4x^3)' + (2x)' - (3)' = 5x^4 - 12x^2 + 2$.

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$

$$y' = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4\right)' = \left(\frac{1}{4}\right)' - \left(\frac{1}{3}x\right)' + (x^2)' - (0{,}5x^4)'$$

$$= -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$$

c) $y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1$

$$y' = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1\right)' = \left(\frac{x^4}{2}\right)' - \left(\frac{2x^3}{3}\right)' + \left(\frac{4x^2}{5}\right)' - (1)'$$

$$= \frac{4x^3}{2} - \frac{2.3x^2}{3} + \frac{8x}{5} = 2x^3 - 2x^2 + \frac{8}{5}x..$$

d) $y = 3x^5(8 - 3x^2)$

$y' = (3x^5)'(8 - 3x^2) + 3x^5(8 - 3x^2)' = 15x^4(8 - 3x^2) + 3x^5.(-6x)$

$= 120x^4 - 45x^6 - 18x^6 = 120x^4 - 63x^6$

3. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = (x^7 - 5x^2)^3$; b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$; c) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$;

d) $y = \dfrac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$; e) $y = \left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^3$ (m, n là hằng số).

Giải

a) $y = (x^7 - 5x^2)^3$

Đặt $u = x^7 - 5x^2 \Rightarrow u' = 7x^6 - 10x$

Ta có: $y = u^3$

$y' = 3u'u^2 = 3(7x^6 - 10x)(x^7 - 5x^2)^2 = (21x^6 - 30x)(x^7 - 5x^2)^2$

$= 3x(7x^5 - 10)x^4(x^5 - 5)^2 = 3x^5(7x^5 - 10)(x^5 - 5)^2$

b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

$y' = (x^2 + 1)'(5 - 3x^2) + (x^2 + 1)(5 - 3x^2)'$

$= 2x(5 - 3x^2) + (x^2 + 1).(-6x) = 10x - 6x^3 - 6x^3 - 6x$

$= 4x - 12x^3 = 4x(1 - 3x^2)$

c) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

$$y' = \frac{(2x)'(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2(x^2 - 1) - 2x.2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}.$$

d) $y = \dfrac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$

$$y' = \frac{(3 - 5x)'(x^2 - x + 1) - (3 - 5x)(x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{-5(x^2 - x + 1) - (3 - 5x)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-5x^2 + 5x - 5 + 10x^2 - 11x + 3}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{5x^2 - 6x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

e) $y = \left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^3$ (m, n là hằng số)

$$y' = 3\left(m + \frac{n}{x^2}\right)'\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2 = 3\left(-\frac{2n}{x^3}\right)\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2 = -\frac{6n}{x^3}\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.$$

4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$;

b) $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$;

c) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số);

d) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$.

Giải

a) $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$

$$y' = (x^2 - x\sqrt{x} + 1)' = (x^2)' - (x\sqrt{x})' + 1' = 2x - (x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})')$$

$$= 2x - \left(\sqrt{x} + x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2x - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$= 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

b) $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$

Đặt $u = 2 - 5x - x^2 \Rightarrow u' = -5 - 2x$

$$y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{-5 - 2x}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}}$$

c) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số)

$$y' = \frac{(x^3)'\sqrt{a^2 - x^2} - x^3(\sqrt{a^2 - x^2})'}{(\sqrt{a^2 - x^2})^2}$$

$$= \frac{3x^2\sqrt{a^2 - x^2} - x^3\dfrac{(a^2 - x^2)'}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = \frac{3x^2\sqrt{a^2 - x^2} - x^3\left(-\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\right)}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{3x^2a^2 + x^4}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x^2(3a^2 + x^2)}{(\sqrt{a^2 - x^2})^3}$$

d) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

$$y' = \frac{(1+x)'\sqrt{1-x} - (1+x)(\sqrt{1-x})'}{(\sqrt{1-x})^2} = \frac{\sqrt{1-x} - (1+x)\dfrac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x} + (1+x)\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{2(1-x)+1+x}{2(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{3-x}{2(\sqrt{1-x})^3}$$

5. Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tìm x để:

a) $y' > 0$; b) $y' < 3$.

Giải

$y = x^3 - 3x^2 + 2$

$y' = 3x^2 - 6x$

a) $y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) > 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	

Vậy $y' > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$.

b) $y' < 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3 < 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x - 1) < 0$

Tam thức $x^2 - 2x - 1$ có hai nghiệm $1 - \sqrt{2}$ và $1 + \sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2 - 2x - 1$		+	0	–	0	+	

Vậy $y' < 3 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$

§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

NỘI DUNG CẦN NHỚ

(1)
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(2)
- $(\sin u(x))' = u'(x)\cos u(x)$
- $(\cos u(x))' = -u'(x)\sin u(x)$
- $(\tan u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$
- $(\cot u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$

BÀI TẬP

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x-1}{5x-2}$; b) $y = \dfrac{2x+3}{7-3x}$; c) $y = \dfrac{x^2+2x+3}{3-4x}$; d) $y = \dfrac{x^2+7x+3}{x^2-3x}$.

Giải

a) $y = \dfrac{x-1}{5x-2}$

$$y' = \frac{(x-1)'(5x-2)-(x-1)(5x-2)'}{(5x-2)^2} = \frac{5x-2-(x-1).5}{(5x-2)^2} = \frac{3}{(5x-2)^2}$$

b) $y = \dfrac{2x+3}{7-3x}$

$$y' = \frac{(2x+3)'(7-3x)-(2x+3)(7-3x)'}{(7-3x)^2} = \frac{2(7-3x)-(2x+3)(-3)}{(7-3x)^2}$$

$$= \frac{23}{(7-3x)^2}$$

c) $y = \dfrac{x^2+2x+3}{3-4x}$

$$y' = \frac{(x^2+2x+3)'(3-4x)-(x^2+2x+3).(3-4x)'}{(3-4x)^2}$$

$$= \frac{(2x+2)(3-4x)-(x^2+2x+3)(-4)}{(3-4x)^2}$$

$$= \frac{-8x^2-2x+6+4x^2+8x+12}{(3-4x)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+6x+18}{(3-4x)^2} = \frac{-2(2x^2-3x-9)}{(3-4x)^2}.$$

d) $y = \dfrac{x^2+7x+3}{x^2-3x}$

$$y' = \frac{(x^2+7x+3)'(x^2-3x)-(x^2+7x+3)(x^2-3x)'}{(x^2-3x)^2}$$

$$= \frac{(2x+7)(x^2-3x)-(x^2+7x+3)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$= \frac{2x^3-6x^2+7x^2-21x-2x^3+3x^2-14x^2+21x-6x+9}{(x^2-3x)^2}$$

$$= \frac{-10x^2-6x+9}{x^2(x-3)^2}.$$

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $y' < 0$ với $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$; b) $y' \geq 0$ với $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$;

c) $y' > 0$ với $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$

Giải

a) $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

$$y' = \frac{(x^2 + x + 2)'(x - 1) - (x^2 + x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{(2x + 1)(x - 1) - (x^2 + x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} < 0$$

Tam thức $x^2 - 2x - 3$ có hai nghiệm -1; 3.

Tam thức $(x - 1)^2 > 0, \forall x \neq 1$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+	0	−	|	−	0	+	
$(x - 1)^2$		+	|	+	0	+	|	+	
y'		+	0	−	‖	−	0	+	

$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ hoặc $1 < x < 3$

Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là $S = (-1; 1) \cup (1; 3)$.

b) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$

$$y' = \frac{(x^2 + 3)'(x + 1) - (x^2 + 3)(x + 1)'}{(x + 1)^2} = \frac{2x(x + 1) - (x^2 + 3)}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \geq 0$$

Tam thức $x^2 + 2x - 3$ có hai nghiệm 1 và -3.

Tam thức $(x + 1)^2 \geq 0, \forall x \neq -1$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x + 1)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$y' \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq 1$

Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

c) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$

$$y' = \frac{(2x - 1)'(x^2 + x + 4) - (2x - 1)(x^2 + x + 4)'}{(x^2 + x + 4)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + x + 4) - (2x - 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 4)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 8 - 4x^2 + 1}{(x^2 + x + 4)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x + 9}{(x^2 + x + 4)^2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 2x + 9}{(x^2 + x + 4)^2} > 0$$

Tam thức $-2x^2 + 2x + 9$ có hai nghiệm $\dfrac{1 - \sqrt{19}}{2}$ và $\dfrac{1 + \sqrt{19}}{2}$.

$$(x^2 + x + 4)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$		$\frac{1 - \sqrt{19}}{2}$		$\frac{1 + \sqrt{19}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 9$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2 + x + 4)^2$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{19}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{19}}{2}$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là $S = \left(\dfrac{1 - \sqrt{19}}{2}; \dfrac{1 + \sqrt{19}}{2}\right)$.

3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$;

b) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

c) $y = x\cot x$;

d) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$;

e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$;

f) $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$.

Giải

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$

$$y' = (5\sin x - 3\cos x)' = (5\sin x)' - (3\cos x)'$$

$$= 5\cos x - 3(-\sin x) = 5\cos x + 3\sin x$$

b) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(1 - 2\sin x\cos x) - (1 + 2\sin x\cos x)}{1 - 2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{-2}{1 - \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x - 1}.$$

c) $y = x\cot x$

$$y' = x'\cot x + x(\cot x)' = \cot x - x.\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}.$$

d) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' + \left(\frac{x}{\sin x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)'x - \sin x.(x)'}{x^2} + \frac{x'(\sin x) - x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = (x\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$

$$y' = \frac{(1 + 2\tan x)'}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \frac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1 + 2\tan x}}$$

f) $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$

$$y' = (\sqrt{1 + x^2})'\cos\sqrt{1 + x^2} = \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\cos\sqrt{1 + x^2} = \frac{x\cos\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}$$

4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$; b) $y = \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)(7x - 3)$;

c) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$; d) $y = \tan^2 x - \cot x^2$;

e) $y = \cos\frac{x}{1 + x}$.

Giải

a) $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$

$$y' = (9 - 2x)'(2x^3 - 9x^2 + 1) + (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$$
$$= -2(2x^3 - 9x^2 + 1) + (9 - 2x)(6x^2 - 18x)$$
$$= -4x^3 + 18x^2 - 2 + 54x^2 - 162x - 12x^3 + 36x^2$$
$$= -16x^3 + 108x^2 - 162x - 2$$

b) $y = \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)(7x - 3)$

$$y' = \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)'(7x - 3) + \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)(7x - 3)'$$
$$= \left(\frac{6}{2\sqrt{x}} + \frac{2x}{x^4}\right)(7x - 3) + \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)7$$
$$= \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}\right)(7x - 3) + 7\left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{21x}{\sqrt{x}} + \frac{14}{x^2} - \frac{9}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3} + 42\sqrt{x} - \frac{7}{x^2}$$
$$= 63\sqrt{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{9\sqrt{x}}{x}.$$

c) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$

$$y' = (x - 2)'\sqrt{x^2 + 1} + (x - 2)\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'$$
$$= \sqrt{x^2 + 1} + (x - 2)\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1 + x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

d) $y = \tan^2 x - \cot^2 x$

$$y' = 2(\tan x)'.\tan x + (x^2)'.\frac{1}{\sin^2 x^2}$$
$$= 2.\frac{1}{\cos^2 x}.\tan x + 2\frac{1}{\sin^2 x^2} = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2x}{\sin^2 x^2}$$

c) $y = \cos\frac{x}{1+x}$

$$y' = -\left(\frac{x}{1+x}\right)'\sin\frac{x}{1+x} = -\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\sin\frac{x}{1+x} = -\frac{1}{(x+1)^2}\sin\frac{x}{1+x}$$

5. Tính $\frac{f'(1)}{\varphi'(1)}$, biết rằng $f(x) = x^2$ và $\varphi(x) = 4x + \sin\frac{\pi x}{2}$.

Giải

Ta có: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$

$$\varphi(x) = 4x + \sin\frac{\pi x}{2}$$

$$\varphi'(x) = (4x)' + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)' = 4 + \frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \varphi'(1) = 4 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 4$$

Vậy $\frac{f'(1)}{\varphi'(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

6. Chứng minh rằng các hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc x:

a) $y = \sin^6x + \cos^6x + 3\sin^2x.\cos^2x$;

b) $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2x.$

Giải

a) $y = \sin^6x + \cos^6x + 3\sin^2x\cos^2x$

$$\begin{aligned}
y' &= 6\cos x\sin^5x - 6\sin x\cos^5x + 3(2\sin x\cos x\cos^2x - 2\sin^2x\cos x\sin x)\\
&= 6\cos x\sin^5x - 6\sin x\cos^5x + 6\sin x\cos^3x - 6\cos x\sin^3x\\
&= 3\sin^4x\sin2x - 3\cos^4x\sin2x + 3\sin2x\cos^2x - 3\sin2x\sin^2x\\
&= 3\sin2x(\sin^4x - \cos^4x) + 3\sin2x(\cos^2x - \sin^2x)\\
&= 3\sin2x(\sin^2x - \cos^2x)(\sin^2x + \cos^2x) - 3\sin2x(\sin^2x - \cos^2x)\\
&= 3\sin2x(\sin^2x - \cos^2x) - 3\sin2x(\sin^2x - \cos^2x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Vậy $y' = 0$, với mọi x hay y' không phụ thuộc x

b) $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2x$

Ta có: $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}+x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

hay $$\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

Do đó $y = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - 2\sin^2x$

Suy ra:

$$y' = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - 4\cos x\sin x$$

$$= 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right) - 2\sin 2x$$

$$= 2\left[\sin\frac{2\pi}{3}\cos 2x - \sin 2x\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\cos 2x - \sin 2x\cos\frac{2\pi}{3} - \sin 2x\right]$$

$$= 2\left[-\sin 2x\cos\frac{2\pi}{3} - \sin 2x\cos\frac{2\pi}{3} - \sin 2x\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \sin 2x\right] = 0$$

Vậy $y' = 0$, với mọi x hay y' không phụ thuộc vào x.

7. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng:

a) $f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$;

b) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$.

Giải

a) $$f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$$

$$f'(x) = -3\sin x + 4\cos x + 5$$

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\sin x + 4\cos x + 5 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\cos x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1$$

Đặt $\cos\varphi = \frac{3}{5}\left(\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow \sin\varphi = \frac{4}{5}$

Do đó sinxcosφ – sinφcosx = 1 ⇔ $\sin(x - \varphi) = \sin\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow x - \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \varphi + \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là $x = \varphi + \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(Trong đó $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ và $\sin\varphi = \frac{4}{5}$)

b) $$f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$$

Suy ra $f'(x) = -\cos(\pi + x) - 2.\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$

$$= \cos x - \sin\left(\pi + \frac{x}{2}\right) = \cos x + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin\frac{x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = -\cos x \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \sin\left(x - \frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right.,\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi - k4\pi \\ x = \pi + \frac{k4\pi}{3} \end{array}\right.,\ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm phương trình $f'(x) = 0$ là $\left[\begin{array}{l} x = \pi - k4\pi \\ x = \pi + \frac{k4\pi}{3} \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$

8. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$, biết rằng:

a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$;

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$.

Giải

a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$

$g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$

$\Rightarrow g'(x) = 6x + 1$

Do đó $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 1 > 6x + 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) > 0$

Các nhị thức 3x và x − 2 có nghiệm là 0 và 2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		−	0	+		+	
$x - 2$		−		−	0	+	
$3x(x - 2)$		+	0	−	0	+	

Vậy nghiệm bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ là $x < 0$ hoặc $x > 2$

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 2x$

$g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3} \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + x$

Do đó $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x \Leftrightarrow 6x^2 - 2x - 3x^2 - x > 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow 3x(x - 1) > 0$

Các nhị thức 3x và x − 1 có nghiệm là 0 và 1

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x$		−	0	+		+	
$x - 1$		−		−	0	+	
$3x(x - 1)$		+	0	−	0	+	

Vậy nghiệm bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ là $x < 0$ hoặc $x > 1$.

§4. VI PHÂN

NỘI DUNG CẦN NHỚ

* Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$, giả sử Δx là số gia của x

Ta gọi $f'(x).\Delta x$ là vi phân của hàm số y = f(x) tại x ứng với số gia Δx, kí hiệu là df(x) hoặc dy

* $\boxed{dy = df(x) = f'(x)\Delta x}$ hay $\boxed{dy = f'(x)dx}$

* Công thức tính gần đúng.

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x}$$

BÀI TẬP

1. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$ (a, b là các hằng số); b) $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$.

Giải

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$

Ta có: $dy = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{a+b}\right)' dx = \dfrac{1}{(a+b)2\sqrt{x}}dx$

b) $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$

$$dy = [(x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})]'dx$$

$$= [(x^2 + 4x + 1)'(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})']dx$$

$$= [(2x + 4)(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}})]\,dx$$

$$= [(2x + 4)(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}})]dx$$

2. Tìm dy, biết:

a) $y = \tan^2 x$; b) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$.

Giải

a) $y = \tan^2 x$

Ta có: $dy = (\tan^2 x)'dx = 2\tan x.\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}dx$

b) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$

Ta có: $dy = \left(\dfrac{\cos x}{1 - x^2}\right)'dx = \dfrac{-\sin x(1 - x^2) - \cos x(-2x)}{(1 - x^2)^2}dx$

$$= \frac{(x^2 - 1)\sin x + 2x\cos x}{(1 - x^2)^2}dx.$$

§5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

NỘI DUNG CẦN NHỚ

* Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x \in (a; b)$

Khi đó $y' = f'(x)$ xác định một hàm số trên $(a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là **đạo hàm cấp hai** của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$.

* Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n - 1$, kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$ và nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $y = f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

* **Ý nghĩa cơ học**

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là **gia tốc tức thời** của chuyển động $S = f(t)$ tại thời điểm t.

BÀI TẬP

1. a) Cho $f(x) = (x + 10^6)$. Tính $f''(2)$;

b) Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$; $f''(0)$; $f''\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$.

Giải

a) $f(x) = (x + 10)^6$

Ta có: $f'(x) = 6(x + 10)^5$

$f''(x) = 30(x + 10)^4$

Vậy $f''(2) = 30(2 + 10)^4 = 622080$.

b) $f(x) = \sin 3x$

Ta có: $f'(x) = 3\cos 3x$

$f''(x) = -9\sin 3x$

Do đó: $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 9\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 9\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$= -9\sin\frac{\pi}{2} = -9$

$f''(0) = -9\sin(0) = 0$

$f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\sin\frac{3\pi}{18} = -9\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{9}{2}$.

2. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{1-x}$; b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; c) $y = \tan x$; d) $y = \cos^2 x$.

Giải

a) $y = \frac{1}{1-x}$

Ta có: $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$y'' = \frac{-[(1-x)^2]'}{(1-x)^4} = \frac{-2(-1)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Ta có: $$y' = \frac{-1.(\sqrt{1-x})'}{(\sqrt{1-x})^2} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{(\sqrt{1-x})^2} = \frac{1}{2(\sqrt{1-x})^3}$$

$$y'' = \frac{-1[2(\sqrt{1-x})^3]''}{4(\sqrt{1-x})^6} = \frac{-2.3(\sqrt{1-x})'.(\sqrt{1-x})^2}{4(\sqrt{1-x})^6}$$

$$= \frac{-3\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{2(\sqrt{1-x})^4} = \frac{3}{4(\sqrt{1-x})^5}.$$

c) $y = \tan x$

Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$y'' = \frac{-1.(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{-2(\cos x)'.\cos x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

c) $y = \cos^2 x$

Ta có: $y' = 2(\cos x)'\cos x = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$

$y'' = -2\cos 2x$

ÔN TẬP CHƯƠNG V

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5$;

b) $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$;

c) $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$

d) $y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)$;

e) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$;

f) $y = \frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$.

Giải

a) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5$

$$y' = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} + 1 = x^2 - x + 1.$$

b) $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$

$$y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{4(x^2)'}{x^4} - \frac{5(x^3)'}{x^6} + \frac{6(x^4)'}{7x^8}$$

$$= -\frac{2}{x^2} + \frac{4.2x}{x^4} - \frac{5.3x^2}{x^6} + \frac{6.4x^3}{7.x^8} = -\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{24}{7x^5}.$$

c) $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$

$$y' = \frac{(6x - 6)4x - (3x^2 - 6x + 7).4}{16x^2} = \frac{24x^2 - 24x - 12x^2 + 24x - 28}{16x^2}$$

$$= \frac{12x^2 - 28}{16x^2} = \frac{3x^2 - 7}{4x^2}.$$

d) $y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1)$

$$y' = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)'(\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1)'$$

$$= \left(-\frac{2}{x^2} + 3\right)(\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x\right).\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{x}}{x^2} + \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}}.$$

$$= \frac{-2\sqrt{x}}{x^2} + \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x} - 3 + \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$= \frac{-4\sqrt{x} + 4 + 6x^2\sqrt{x} - 6x^2 + 2\sqrt{x} + 3x^2\sqrt{x}}{2x^2}$$

$$= \frac{9x^2\sqrt{x} - 6x^2 - 2\sqrt{x} + 4}{2x^2}$$

e) $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

$$y' = \frac{(1 + \sqrt{x})'(1 - \sqrt{x}) - (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})'}{(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) - (1 + \sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}.$$

f) $y = \dfrac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$

$$y' = \frac{(-2x + 7)(x^2 - 3x) - (-x^2 + 7x + 5)(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{-2x^3 + 6x^2 + 7x^2 - 21x + 2x^3 - 3x^2 - 14x^2 + 21x - 10x + 15}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 - 10x + 15}{(x^2 - 3x)^2}.$$

2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2\sqrt{x}\sin x - \dfrac{\cos x}{x}$; b) $y = \dfrac{3\cos x}{2x + 1}$; c) $y = \dfrac{t^2 + 2\cos t}{\sin t}$;

d) $y = \dfrac{2\cos\varphi - \sin\varphi}{3\sin\varphi + \cos\varphi}$; e) $y = \dfrac{\tan x}{\sin x + 2}$; f) $y = \dfrac{\cot x}{2\sqrt{x} - 1}$.

Giải

a) $y = 2\sqrt{x}\sin x - \dfrac{\cos x}{x}$

$$y' = (2\sqrt{x})'\sin x + 2\sqrt{x}.(\sin x)' - \frac{(\cos x)'x - \cos x.x'}{x^2}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{x}}\sin x + 2\sqrt{x}\cos x - \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\sin x}{x} + 2\sqrt{x}\cos x + \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}\sin x + 2x^2\sqrt{x}\cos x + x\sin x + \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x} + 1)\sin x + (2x^2\sqrt{x} + 1)\cos x}{x^2}$$

b) $y = \dfrac{3\cos x}{2x + 1}$

$$y' = \frac{(3\cos x)'(2x + 1) - (3\cos x)(2x + 1)'}{(2x + 1)^2} = \frac{-3\sin x.(2x + 1) - 6\cos x}{(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{-3(2x + 1)\sin x - 6\cos x}{(2x + 1)^2}$$

c) $y = \dfrac{t^2 + 2\cos t}{\sin t}$

$$y' = \frac{(t^2 + 2\cos t)'\sin t - (t^2 + 2\cos t).(\sin t)'}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{(2t - 2\sin t)\sin t - (t^2 + 2\cos t).\cos t}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{2t\sin t - 2\sin^2 t - t^2\cos t - 2\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{2t\sin t - t^2\cos t - 2}{\sin^2 t}$$

d) $y = \dfrac{2\cos\varphi - \sin\varphi}{3\sin\varphi + \cos\varphi}$

$$y' = \frac{(2\cos\varphi - \sin\varphi)'(3\sin\varphi + \cos\varphi) - (2\cos\varphi - \sin\varphi)(3\sin\varphi + \cos\varphi)'}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{(-2\sin\varphi - \cos\varphi)(3\sin\varphi + \cos\varphi) - (2\cos\varphi - \sin\varphi)(3\cos\varphi - \sin\varphi))'}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{-6\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\varphi - 6\cos^2\varphi}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$$

$$+ \frac{2\sin\varphi\cos\varphi + 3\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{-7(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2} = \frac{-7}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}.$$

e) $y = \dfrac{\tan x}{\sin x + 2}$

$$y' = \frac{(\tan x)'(\sin x + 2) - (\tan x)(\sin x + 2)'}{(\sin x + 2)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(\sin x + 2) - \tan x.(\cos x)}{(\sin x + 2)^2} = \frac{\sin x + 2 - \sin x.\cos^2 x}{\cos^2 x(\sin x + 2)^2}$$

$$= \frac{\sin x(1 - \cos^2 x) + 2}{\cos^2 x(\sin x + 2)^2} = \frac{\sin^3 x + 2}{\cos^2 x(\sin x + 2)^2}.$$

f) $y = \dfrac{\cot x}{2\sqrt{x} - 1}$

$$y' = \frac{(\cot x)'(2\sqrt{x} - 1) - (\cot x)(2\sqrt{x} - 1)'}{(2\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{\sin^2 x}(2\sqrt{x} - 1) - \cot x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(2\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{(1 - 2\sqrt{x}) - \dfrac{\cos x.\sin x}{\sqrt{x}}}{(\sin^2 x)(2\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2x}{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)^2.\sin^2 x}$$

3. Cho hàm số: $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Tính $f(3) + (x - 3).f\,'(3)$

Giải

$f(x) = \sqrt{1 + x}$

$f\,'(x) = \dfrac{(1 + x)'}{2\sqrt{1 + x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + x}}$

Ta có: $f(3) = \sqrt{1 + 3} = 2$

$f\,'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + 3}} = \dfrac{1}{4}$

Vậy $\quad f(3) + (x - 3).f\,'(3) = 2 + (x - 3).\dfrac{1}{4} = \dfrac{5 + x}{4}$.

4. Cho hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \dfrac{1}{1 - x}$. Tính $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

Giải

$f(x) = \tan x \Rightarrow f\,'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$g(x) = \dfrac{1}{1 - x} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$

Ta có: $f'(0) = \dfrac{1}{\cos^2 0} = 1$

$g'(0) = \dfrac{1}{(1-0)^2} = 1$

Vậy $\dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \dfrac{1}{1} = 1.$

5. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng: $f(x) = 3x + \dfrac{60}{x} - \dfrac{64}{x^3} + 5$

Giải

$$f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$$

$$f'(x) = 3 - 60\frac{(x)'}{x^2} + \frac{64(x^3)'}{x^6}$$

$$= 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{64.3x^2}{x^6} = 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{192}{x^4} = \frac{3x^4 - 60x^2 + 192}{x^4}$$

Giải phương trình $f'(x) = 0$ hay $3x^4 - 60x^2 + 192 = 0$

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$

Ta có phương trình $3t^2 - 60t + 192 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 64 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 16 \end{array}\right.$

- $t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
- $t = 16 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm $x = \pm 2$; $x = \pm 4$.

6. Cho $f_1(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, $f_2(x) = x\sin x$. Tính $\dfrac{f_1'(1)}{f_2'(1)}$.

Giải

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$\Rightarrow \quad f_1'(x) = \frac{(\cos x)'.x - \cos x.(x)'}{x^2} = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

$$f_2(x) = x\sin x$$

$$\Rightarrow \quad f_2'(x) = \sin x + x\cos x$$

Do đó $f_1'(1) = \dfrac{-\sin 1 - \cos 1}{1} = -(\sin 1 + \cos 1)$

$f_2'(1) = \sin 1 + \cos 1$

Vậy $\dfrac{f'_1(1)}{f'_2(1)} = \dfrac{-(\sin 1 + \cos 1)}{\sin 1 + \cos 1} = -1.$

7. Viết phương trình tiếp tuyến của:

a) Hyperbol $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm A(2; 3);

b) Đường cong $y = x^3 + 4x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$;

c) Parabol $y = x^2 - 4x + 4$ tại điểm có tung độ $y_0 = 1$.

Giải

Phương trình tiếp tuyến với:

a) (H) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại A(2; 3)

Ta có: $y' = \dfrac{x - 1 - (x + 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

$y'(2) = \dfrac{-2}{(2-1)^2} = -2$

Phương trình tiếp tuyến với (H) tại A(2; 3) là:

$y - 3 = -2(x - 2)$ hay $y = -2x + 7$.

b) (C) $y = x^3 + 4x^2 - 1$ tại $x_0 = -1$

Ta có: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1 + 4 - 1 = 2$

$y' = 3x^2 + 8x \Rightarrow y'(-1) = 3 - 8 = -5$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại (–1; 2) là:

$y - 2 = -5(x + 1)$ hay $y = -5x - 3$.

c) (P) $y = x^2 - 4x + 4$ tại điểm có tung độ $y_0 = 1$.

$$y_0 = 1 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 1 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$$

Như vậy ta có hai điểm M(1; 1) và N(3; 1) thuộc (P) có tung độ 1.

$y' = 2x - 4$

$y'(1) = 2 - 4 = -2$ và $y'(3) = 2.3 - 4 = 2$

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại M(1; 1).

$y - 1 = -2(x - 1)$ hay $y = -2x + 3$

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại N(3; 1).

$y - 1 = 2(x - 3)$ hay $y = 2x - 5$

8. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $s = t^3 - 3t^2 - 9t$ trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tính vận tốc của chuyển động khi t = 2 s;

b) Tính gia tốc của chuyển động khi t = 3 s;

c) Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu;

d) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Giải

$S = t^3 - 3t^2 - 9t$

a) Vận tốc của chuyển động khi t = 2 s

$$V(t) = S' = 3t^2 - 6t - 9$$

$$V(2) = 3.4 - 6.2 - 9 = -9 \text{ m/s}.$$

b) Gia tốc của chuyển động khi t = 3 s

$$\gamma(t) = v'(t) = 6t - 6$$

$$\gamma(2) = 6.3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2.$$

c) Thời điểm vận tốc triệt tiêu:

$$\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{array}\right.$$

Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu:

$$\gamma(3) = 6.3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2.$$

d) Thời điểm gia tốc triệt tiêu:

$$\gamma(t) = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu:

$$V(1) = 3.1 - 6.1 - 9 = -12 \text{ m/s}.$$

9. Cho hai hàm số: $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tính góc giữa hai tiếp tuyến kể trên.

Giải

Hoành độ giao điểm hai đồ thị là nghiệm của

$$\frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = 1 \ (x \neq 0) \Leftrightarrow x = 1$$

Tung độ giao điểm $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị $\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$+\ y = \frac{1}{x\sqrt{2}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{2}x^2} \quad \text{và} \quad y'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$+\ y = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{2}} \quad \text{và} \quad y'(1) = \sqrt{2}$$

Phương trình tiếp tuyến với (C_1) $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ tại $\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ là:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) \text{ hay } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$$

Phương trình tiếp tuyến với (C_2) $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ tại $\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ là:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(x - 1) \text{ hay } y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mặt khác ta có: $a.a' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = -1$

Do đó góc tạo bởi hai tiếp tuyến này là 90^0.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

10. Với $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$; g'(2) bằng:

(A) 1; (B) –3; (C) –5; (D) 0.

Giải

Chọn (B)

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$$

$$g'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 5).1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$g'(2) = \frac{2^2 - 2.2 - 3}{(2 - 1)^2} = -3.$$

11. Nếu $f(x) = \sin^3x + x^2$ thì $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng:

(A) 0; (B) 1; (C) -2; (D) 5.

Giải

Chọn (D)

$$f(x) = \sin^3x + x^2$$

$$f'(x) = 3\cos x.\sin^2x + 2x$$

$$f''(x) = 3(-\sin x\sin^2x + 2\cos^2x\sin x) + 2 = 3[-\sin^3x + 2(1 - \sin^2x)\sin x] + 2$$

$$= 3[-\sin^3x + 2\sin x - 2\sin^3x] + 2 = -9\sin^3x + 6\sin x + 2$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 6\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$$

12. Giả sử $h(x) = 5(x + 1)^3 + 4(x + 1)$

Tập nghiệm của phương trình $h''(x) = 0$

(A) $[-1; 2]$; (B) $(-\infty; 0]$; (C) $\{-1\}$; D. $\varnothing$.

Giải

Chọn (C)

$$h(x) = 5(x + 1)^3 + 4(x + 1)$$

Ta có: $h'(x) = 15(x + 1)^2 + 4$

$h''(x) = 30(x + 1)$

Từ đó: $h''(x) = 0 \Leftrightarrow 30(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Tập nghiệm phương trình là $\{-1\}$.

13. Cho $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$

Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 0$ là:

A. $\varnothing$; B. $(0; +\infty)$; C. $[-2; 2]$; D. $(-\infty; +\infty)$.

Giải

Chọn (A)

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Ta có: $f'(x) = x^2 + x + 1$

Từ đó $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \le 0$

Vì $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Nên bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là $\varnothing$.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \cos 2x$

a) Chứng minh rằng $\cos 2(x + k\pi) = \cos 2x$ với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos 2x$;

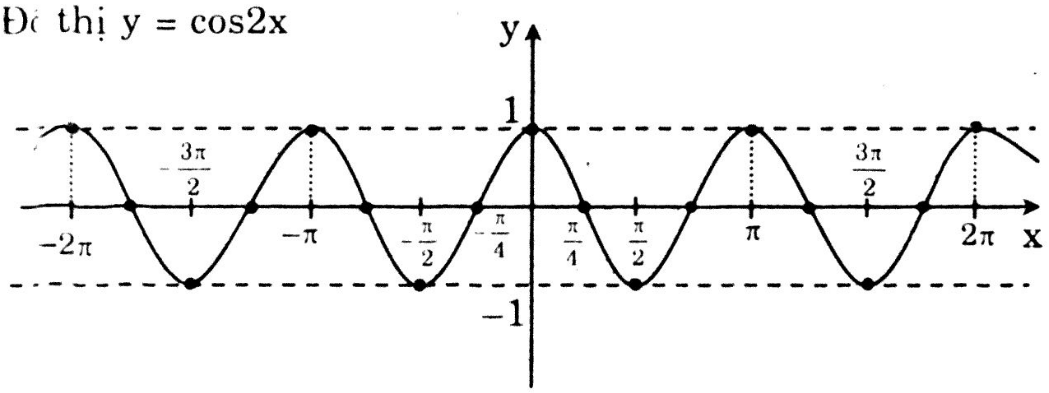
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{3}$;

c) Tìm tập xác định của hàm số $z = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos^2 2x}}$.

Giải

a) Ta có: $\cos 2(x + k\pi) = \cos(2x + 2k\pi) = \cos 2x, \forall k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị $y = \cos 2x$



b) Ta có: $y = \cos 2x$

$$y' = -2\sin 2x;\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{2\pi}{3} = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Với $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ là:

$$y + \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{hay} \quad y = -\sqrt{3}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$$

c) Hàm số $z = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos^2 2x}}$ xác định khi và chỉ khi

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos^2 2x} \ge 0 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x \ge 0 \text{ (do } 1 + \cos^2 2x > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \le 1 \text{ (đúng với mọi } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{5}{6 + 7\sin 2x}$.

a) Tính $A = \dfrac{5}{6 + 7\sin 2a}$, biết $\tan a = 0{,}2$.

b) Tính đạo hàm của hàm số đã cho.

c) Xác định các khoảng trên đó y' không dương.

Giải

$$y = \frac{5}{6 + 7\sin 2x}$$

a) Tính $A = \dfrac{5}{6 + 7\sin 2a}$, biết $\tan a = 0{,}2$

Ta có: $\sin 2a = 2\sin a\cos a = \dfrac{2\sin a\cos a}{\sin^2 a + \cos^2 a} = \dfrac{\dfrac{2\sin a\cos a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1}$

$$= \frac{2\tan a}{\tan^2 a + 1} = \frac{2.0{,}2}{0{,}2^2 + 1} = \frac{0{,}4}{1{,}04} = \frac{40}{104} = \frac{5}{13}$$

Do đó $A = \dfrac{5}{6 + 7.\dfrac{5}{13}} = \dfrac{5.13}{6.13 + 35} = \dfrac{65}{113}$

b) $y = \dfrac{5}{6 + 7\sin 2x}$

$$y' = \frac{-5(6 + 7\sin 2x)'}{(6 + 7\sin 2x)^2} = \frac{-5.14\cos 2x}{(6 + 7\sin 2x)^2} = \frac{-70\cos 2x}{(6 + 7\sin 2x)^2}$$

c) $y' \le 0 \Leftrightarrow -70\cos 2x \le 0 \Leftrightarrow \cos 2x \ge 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi \le 2x \le \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$ thì y' không dương.

3. Giải các phương trình:

a) $2\sin\dfrac{x}{2}\cos^2 x - 2\sin\dfrac{x}{2}\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

b) $3\cos x + 4\sin x = 5$;

c) $\sin x + \cos x = 1 + \cos x\sin x$;

d) $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x \ (x \in [\pi; 3\pi])$;

e) $\left(\cos\dfrac{x}{4} - 3\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\dfrac{x}{4} - 3\cos x\right)\cos x = 0$.

Giải

a) $$2\sin\frac{x}{2}\cos^2x - 2\sin\frac{x}{2}\sin^2x = \cos^2x - \sin^2x \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\cos^2x - \sin^2x) - (\cos^2x - \sin^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin\frac{x}{2} - 1)(\cos^2x - \sin^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin\frac{x}{2} - 1).\cos2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\\ \cos2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi}{6}\\ \cos2x = 0\end{array}\right.$$

$$* \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k2\pi\\ \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{3} + k4\pi\\ x = \frac{5\pi}{3} + k4\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$* \cos2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \frac{5\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

b) $$3\cos x + 4\sin x = 5 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x = 1 \text{ (với } \sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5})$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(Trong đó $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$)

c) $\sin x + \cos x = 1 + \cos x \sin x \qquad (3)$

Đặt $\quad t = \sin x + \cos x, \ |t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \sin x\cos x$

$\Rightarrow \quad \sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Ta có phương trình:

$$t = 1 + \frac{t^2 - 1}{2} \Leftrightarrow 2t = 2 + t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Với t = 1, giải phương trình

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos x = 1 \ \left(\text{với } \tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}.x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \ \left(\text{do } \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

d) $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x \quad (4)$ với $x \in [\pi; 3\pi]$

Với điều kiện $\sin x \ge 0$

$$(4) \quad \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x).\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in [\pi; 3\pi]$ và $\sin x \geq 0$, nên các nghiệm của phương trình là 2π, $\frac{5\pi}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{2}$.

e) $$\left(\cos\frac{x}{4} - 3\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 3\cos x\right)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{x}{4} - 3\sin^2 x + \cos x + \cos x\sin\frac{x}{4} - 3\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{x}{4}\right) - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{5x}{4} - 3 + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{5x}{4} + \cos x = 3$$

Vì $\sin\frac{5x}{4} \leq 1$ và $\cos x \leq 1$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

4. Trong một bệnh viện có 40 bác sĩ ngoại khoa. Hỏi có bao nhiêu cách phân công ca mổ, nếu mỗi ca gồm:

a) Một bác sĩ mổ và một bác sĩ phụ?

b) Một bác sĩ mổ và bốn bác sĩ phụ?

Giải

a) Cách chọn một bác sĩ mổ và một bác sĩ phụ từ 40 người là cách sắp xếp thứ tự, nên là một chỉnh hợp chập 2 của 40 phần tử ta có:

$$A_{40}^{2} = \frac{40!}{38!} = \frac{40.39.38!}{38!} = 1560 \text{ cách chọn}$$

b) Sau khi chọn một bác sĩ mổ từ 40 bác sĩ có 40 cách chọn. Còn lại 39 bác sĩ ta chọn 4 người mổ, cách chọn này là chỉnh hợp chập 4 của 39 phần tử, ta có C_{39}^{4} cách chọn.

Theo qui tắc nhân ta có:

$$40.C_{39}^{4} = 40.\frac{39!}{4!(39-4)!} = \frac{40.39.38.37.36}{4.3.2} = 3290040 \text{ cách chọn}$$

5. Tìm số hạng không chứa a trong khai triển của nhị thức $\left(\frac{1}{a^3} + a\right)^{10}$.

Giải

Theo công thức nhị thức Niutơn.

$$\left(\frac{1}{a^3} + a^2\right)^{10} = C_{10}^{0}\left(\frac{1}{a^3}\right)^{10} + C_{10}^{1}\left(\frac{1}{a^3}\right)^{9}.a^2 + C_{10}^{2}\left(\frac{1}{a^3}\right)^{8}(a^2)^2 + .. + C_{10}^{10}(a^2)^{10}$$

Trong đó $C_{10}^{k}\left(\frac{1}{a^3}\right)^{10-k}(a^2)^k$ ($k = 0, 1, 2, ..., 10$) là số hạng thứ **k**.

Số hạng không chứa a khi :

$$a^{2k} = (a^3)^{10-k} \Leftrightarrow a^{2k} = a^{30-3k} \Leftrightarrow 2k = 30 - 3k$$

$$\Leftrightarrow 5k = 30 \Leftrightarrow k = 6$$

Vậy số hạng không chứa a:

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210.$$

6. Chọn ngẫu nhiên ba học sinh từ một tổ gồm có sáu nam và bốn nữ. Tìm xác suất sao cho:

a) Cả ba học sinh đều là nam;

b) Có ít nhất một nam.

Giải

a) Chọn ngẫu nhiên ba học sinh từ 10 học sinh, mỗi cách chọn là tổ hợp chập 3 của 10 phần tử, không gian mẫu là tập hợp có

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10.9.8}{3.2} = 120 \text{ phần tử}$$

Gọi A là biến cố "cả ba học sinh đều là nam".

Ta có $n(A) = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{3.2} = 20$ phần tử

Vậy xác suất để chọn cả ba học sinh đều là nam là:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\varnothing)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

b) Gọi B là biến cố "cả ba bạn đều là nữ"

Ta có $n(B) = C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$ phần tử

Vậy xác suất để chọn "có ít nhất một bạn là nam" là:

$$p(B) = 1 - p(B) = 1 - \frac{4}{120} = \frac{29}{30}.$$

7. Một tiểu đội có 10 người được xếp ngẫu nhiên thành hàng dọc, trong đó có anh A và anh B. Tính xác suất sao cho:

a) A và B đứng liền nhau;

b) Trong hai người đó có một người đứng ở vị trí số 1 và người kia đứng ở vị trí cuối cùng.

Giải

a) Mỗi cách sắp xếp tiểu đội đứng hàng dọc là hoán vị 10 phần tử nên không gian mẫu là tập hợp có.

$$n(\varnothing) = 10! \text{ phần tử}$$

Gọi A là biến cố "A và B đứng liền nhau".

Cách chọn hai anh A và B đứng liền nhau có hai cách chọn, trong mỗi cách chọn A hoặc B số người còn lại được sắp xếp theo hàng dọc là hoán vị 9 phần tử.

Ta có $n(A) = 2.9!$

Vậy xác suất để "A và B dứng liền nhau" là:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\varnothing)} = \frac{2.9!}{10!} = \frac{2.9!}{10.9!} = \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

b) Gọi B là biến cố "Có một người đứng ở vị trí số 1 và người kia đứng ở vị trí cuối cùng".

Cách chọn một người đứng số 1, người đứng cuối cùng có hai cách chọn, trong mỗi cách chọn này còn lại 8 người sắp xếp theo hàng dọc là một hoán vị 8 phần tử.

Ta có: $n(A) = 2.8!$

Vậy xác suất để "trong hai người có một người đứng ở vị trí số 1 và người kia ở vị trí cuối cùng" là:

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\varnothing)} = \frac{2.8!}{10!} = \frac{2.8!}{10.9.8!} = \frac{2}{10.9} = \frac{1}{45}.$$

8. Tìm một cấp số cộng tăng, biết rằng tổng ba số hạng dầu của nó bằng 27 và tổng các bình phương của chúng bằng 275.

Giải

Gọi u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng đầu của cấp số cộng, và d là công sai. $(u_1 < u_2 < u_3)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 & (1) \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 & (2) \end{cases}$$

(1) $\quad u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 27 \Leftrightarrow 3u_1 + 3d = 27 \Leftrightarrow u_1 + d = 9 \quad (1')$

(2) $u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275$

$\Leftrightarrow u_1^2 + u_1^2 + 2u_1d + d^2 + u_1^2 + 4u_1d + 4d^2 = 275$

$\Leftrightarrow 3u_1^2 + 6u_1d + 5d^2 = 275$ (2′)

Từ (1′) $d = 9 - u_1$ thay vào (2′), ta được phương trình.

$3u_1^2 + 6u_1(9 - u_1) + 5(9 - u_1)^2 = 275$

$\Leftrightarrow 3u_1^2 + 54u_1 - 6u_1^2 + 5(81 - 18u_1 + u_1^2) = 275$

$\Leftrightarrow 3u_1^2 + 54u_1 - 6u_1^2 + 405 - 90u_1 + 5u_1^2 - 275 = 0$

$\Leftrightarrow 2u_1^2 - 36u_1 + 130 = 0$

$\Leftrightarrow u_1^2 - 18u_1 + 65 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 13 \\ u_1 = 5 \end{array}\right.$$

- $u_1 = 13 \Rightarrow d = -4$ (loại vì cấp số cộng cho tăng)
- $u_1 = 5 \Rightarrow d = 4$

Vậy cấp số cộng đó là 5, 9, 13, 17, 21, ..., ...

9. Cho biết trong một cấp số nhân, hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ hai bằng 12 và nếu thêm 10 vào số hạng thứ nhất, thêm 8 vào số hạng thứ hai còn giữ nguyên số hạng thứ ba thì ba số mới lập thành một cấp số cộng. Hãy tính tổng năm số hạng đầu của cấp số nhân đã cho.

Giải

Gọi u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 là năm số hạng đầu của cấp số nhân và công bội là q. Ta tính $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$?

Theo giả thiết $u_3 - u_2 = 12$ (1)

và $u_1 + 10,\ u_2 + 8,\ u_3$ lập thành cấp số cộng

Do đó $u_1 + 10 + u_3 = 2(u_2 + 8)$ (2)

Từ (1) $u_1.q^2 - u_1q = 12 \Leftrightarrow u_1(q^2 - q) = 12$

Từ (2) $u_1 + 10 + u_1q^2 = 2(u_1q + 8)$

$\Leftrightarrow u_1 + 10 + u_1q^2 - 2u_1q - 16 = 0$

$\Leftrightarrow u_1(q^2 - 2q + 1) = 6$

$\Leftrightarrow u_1(q - 1)^2 = 6$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u_1(q^2 - q) = 12 \\ u_1(q - 1)^2 = 6 \end{cases}$ $(q \neq 0,\ q \neq 1)$

Giải ra ta được $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$

Tổng $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = u_1\dfrac{1 - q^5}{1 - q} = 6.\dfrac{1 - 2^5}{1 - 2} = 186$

10. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1}$; b) $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+1}+\ldots+\frac{n-1}{n^2+1}\right)$;

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1}$; d) $\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)$.

Giải

a) $\lim \frac{(n+1)(3-2x)^2}{n^3+1} = \lim \frac{(n+1)(9-12n+4n^2)}{n^3+1} = \lim \frac{4n^3-8n^2-3n+9}{n^3+1}$

$$= \lim \frac{n^3\left(4-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{9}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \lim \frac{4-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}+9}{1+\frac{1}{n^3}} = 4$$

b) $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+1}+\ldots+\frac{n-1}{n^2+1}\right)$

$= \lim \frac{n(n-1)}{2(n^2+1)}$ (do $1+2+3+\ldots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$)

$$= \lim \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim \frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1} = \lim \frac{\left(n\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+n\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$

d) $\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right) = \lim \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

$$= \lim \frac{\sqrt{n}(n-1-n)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$= \lim \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

11. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ và $v_n = \dfrac{n\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+1}$

a) Tìm $\lim u_n$; b) Chứng minh rằng $\lim v_n = 0$.

Giải

$$\text{a) } \lim u_n = \lim\frac{n}{n^2+1} = \lim\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$$

$$\text{b) } \lim v_n = \lim\frac{n\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+1} = \lim\frac{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$$

12. Chứng minh rằng hàm số $y = \cos x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$

Giải

Chọn $u_n = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi$ và $v_n = (2n+1)\pi$.

Rõ ràng $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = +\infty$.

Nhưng $\lim\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + n2\pi\right) = 0$ và $\lim\cos(2n+1)\pi = 0$.

Vậy hàm số $y = \cos x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

13. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{6-3x}{\sqrt{2x^2+1}}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$; c) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(x+x^2+\ldots+x^n-\dfrac{n}{1-x}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+3}$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{4x^2-1}}{2-3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x^2-3x+1)$.

Giải

$$\text{a) } \lim_{x\to-2}\frac{6-3x}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4.$$

b) Với $x \neq 2$ Ta có:

$$\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} = \frac{1}{4(2+\sqrt{1})} = \frac{1}{16}$$

c) Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+}(x^2 - 3x + 1) = -1$ và $\lim\limits_{x \to 2^+}(x - 2) = 0$ và $x - 2 > 0$ với mọi $x > 2$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = -\infty$.

d) Khi $x \to 1^-$ thì $|x| < 1$ nên $x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{x}{1 - x}$

Vậy $\lim\limits_{x \to 1}\left(x + x^2 + ... + x^n - \dfrac{n}{1 - x}\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x - n}{1 - x} = -\infty$ (với $n \in N^*$).

$$\text{e) } \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{3}{x}} = 2$$

$$\text{f) } \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{2 - 3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - x\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}}{x\left(-3 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}}{-3 + \frac{2}{x}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{g) } \lim_{x \to -\infty}(-2x^3 + x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \to -\infty} -x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

14. Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm: $\sin x = x - 1$

Giải

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x + 1$.

Hàm số liên tục trên $[0; \pi]$ và $f(0).f(\pi) = 1(-\pi + 1) < 0$.

Nên tồn tại $x_0 \in (0; \pi)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Vậy phương trình $\sin x - x + 1 = 0$ hay $\sin x = x - 1$.

Có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$.

15. Phương trình sau có nghiệm hay không trong khoảng $(-1; 3)$?

$$x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$.

Hàm số này liên tục trên $[-1; 3]$.

Ta có $f(-1) = 2$, $f(0) = -1$ hay $f(-1).f(0) < 0$.

Nên tồn tại $x_0 \in (-1; 0)$ để $f(x_0) = 0$ nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-1; 0)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $(-1\ 3)$.

16. Giải các phương trình:

a) $f'(x) = g(x)$ với $f(x) = \sin^3 2x$ và $g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x$;

b) $f'(x) = 0$ với $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$.

Giải

a) $f(x) = \sin^3 2x$ và $g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x$

Ta có $f'(x) = 6\cos 2x\sin^2 2x$

$$f'(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow 6\cos 2x\sin^2 2x = 4\cos 2x - 5\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow 6\cos 2x\sin^2 2x = 4\cos 2x - 10\sin 2x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(6\sin^2 2x + 10\sin 2x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 2x = 0 & (1)\\ 6\sin^2 2x + 10\sin 2x - 4 = 0 & (2)\end{array}\right.$$

(1) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

(2) $6\sin^2 2x - 10\sin 2x - 4 = 0$

Đặt $t = \sin 2x$, $-1 \le t \le 1$.

Ta có phương trình:

$$6t^2 + 10t - 4 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{1}{3}\\ t = -2 \quad \text{(loại)}\end{array}\right.$$

$$t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi\\ 2x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi\end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k2\pi\end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\ x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi \text{ và } x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k2\pi$$

b) $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x\ (k \in \mathbb{Z})$

$$f'(x) = -60\sin 3x - 60\sin 5x + 60\sin 4x$$

$$= -60(\sin 3x + \sin 5x - \sin 4x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x + \sin 5x - \sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x\cos 2x - \sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0 \\ 2\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin 4x & (1) \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

(2) $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \dfrac{k\pi}{4}$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$;

b) $y = \dfrac{\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$;

d) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

Giải

a) $y = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$

$$y' = \frac{-(\cos^2 3x)'}{\cos^4 3x} = \frac{-2(\cos 3x)'\cos 3x}{\cos^4 3x} = \frac{6\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x} = \frac{3\sin 6x}{\cos^4 3x}.$$

b) $y = \dfrac{\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y' = \frac{(\cos\sqrt{x^2+1})'\sqrt{x^2+1} - (\cos\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{\left(-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\sin\sqrt{x^2+1}\right).\sqrt{x^2+1} - (\cos\sqrt{x^2+1}).\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{-x\sin\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cos\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= -\frac{x(\sqrt{x^2+1}\sin\sqrt{x^2+1} + x\cos\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

c) $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$

$y' = -2x\cos x + (2 - x^2)(-\sin x) + 2\sin x + 2\cos x$

$= -2\sin x + x^2\sin x + 2\sin x = x^2\sin x$

d) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

$$y' = \frac{(\sin x - x\cos x)'(\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)(\cos x + x\sin x)'}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \cos x + x\sin x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)(-\sin x + \sin x + x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$= \frac{x\sin x(\cos x + x\sin x) - (\sin x - \cos x)x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$= \frac{x\sin x\cos x + x^2\sin^2 x - x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$= \frac{x^2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

18. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$; b) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$;

c) $y = \sin ax$ (a là hằng số); d) $y = \sin^2 x$.

Giải

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

$$y' = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y'' = -\frac{-[(x+1)^2]'}{(x+1)4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

b) $y = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$

$y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$

$y'' = -\frac{-(x^2)'}{x^4} - \frac{[(1-x)^2]'}{(1-x)^4} = \frac{2x}{x^4} - \frac{2(-1)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(1-x)^3}$.

c) y = sinax (a là hằng số)

$y' = a\cos ax$

$y'' = -a^2\sin ax$.

d) $y = \sin^2 x$

$y' = 2\cos x.\sin x = \sin 2x$.

$y'' = 2\cos 2x$.

19. Cho hàm số: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C)

Hãy xác định các số b, c, d biết rằng đồ thị (C) của hàm số y = f(x) đi qua các điểm (–1; –3); (1; –1) và $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

Giải

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C)

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

Ta có $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3.\frac{1}{9} + 2b\frac{1}{3} + c = 0 \Leftrightarrow 2b + 3c = -1$ (1)

(C) qua điểm (–1; –3) nên $-1 + b - c + d = -3$ hay $b - c + d = -2$

(C) qua điểm (1; –1) nên $1 + b + c + d = -1$ hay $b + c + d = -2$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2b + 3c = -1 & (1) \\ b - c + d = -2 & (2) \\ b + c + d = -2 & (3) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + 3c = -1 \\ 2c = 0 \\ b + c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -1 \\ c = 0 \\ b + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ c = 0 \\ d = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$.

20. Cho các hàm số: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C); $g(x) = x^2 - 3x + 1$

Với các số b, c, d tìm được ở bài 19, hãy:

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$;

b) Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$;

c) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(\sin 5x) + 1}{g'(\sin 3x) + 3}$.

Giải

Ta có: $f(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}$, $f'(x) = 3x^2 - x$

$g(x) = x^2 - 3x + 1$

a) Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$ nghĩa là tiếp tuyến qua $(-1; -3)$ *(Bài 19)*.

Ta có: $f'(-1) = 3 + 1 = 4$

Phương trình: $y + 3 = 4(x + 1)$ hay $y = 4x + 1$

b) $f'(x) = 3x^2 - x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$f'(\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ \sin x = \dfrac{1}{3} & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\dfrac{1}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm phương trình $f'(\sin x) = 0$ là:

$$x = k\pi,\ x = \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \text{ và } x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

c) $f'(x) = 3x^2 - x \Rightarrow f''(x) = 6x - 1$

$g(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow g'(x) = 2x - 3$

Do đó $\dfrac{f''(\sin 5x) + 1}{g'(\sin 3x) + 3} = \dfrac{3\sin 5x}{\sin 3x} = \dfrac{3.5\dfrac{\sin 5x}{5x}}{3.\dfrac{\sin 3x}{3x}}$

Do $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(\sin 5x) + 1}{g'(\sin 3x) + 3} = 5$.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 3
Chương I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 5
§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 5
§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN 13
§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP 20
ÔN TẬP CHƯƠNG I 30
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 35
Chương II. TỔ HỢP – XÁC SUẤT 37
§1. QUI TẮC ĐẾM 37
§2. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP 39
§3. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU–TƠN 43
§4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ 46
§5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ 50
ÔN TẬP CHƯƠNG II 55
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 59
Chương III. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN 62
§1. PHƯƠNG PHÁP QUI NẠP TOÁN HỌC 62
§2. DÃY SỐ 68
§3. CẤP SỐ CỘNG 74
§4. CẤP SỐ NHÂN 78
ÔN TẬP CHƯƠNG III 82
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 89
Chương IV. GIỚI HẠN 91
§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ 91
§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ 97
§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC 105
ÔN TẬP CHƯƠNG IV 108
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 114
Chương V. ĐẠO HÀM 118
§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM 118
§2. QUI TẮC TÍNH ĐẠO HÀM 125
§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 129
§4. VI PHÂN 139
§5. ĐẠO HÀM CẤP HAI 140
ÔN TẬP CHƯƠNG V 142
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 149
ÔN TẬP CUỐI NĂM 151
MỤC LỤC 167

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: THANH HOA
Trình bày bìa: Nhà sách SAO MAI

Đối tác liên kết xuất bản:
Nhà sách SAO MAI

SÁCH LIÊN KẾT

Giải bài tập Đại số và Giải tích 11
Mã số: 1L – 135ĐH2009
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Xí nghiệp In Đường Sắt
Số xuất bản: 414 – 2009/CXB/09 – 65/ĐHQGHN, ngày 18/5/2009
Quyết định xuất bản số: 135 LK – TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2009